Mahir Matematika 3

untuk Kelas XII SMA/MA

Program Bahasa

Geri Achmadi
Dwi Gustanti
Dani Wildan Hakim
Willi Sutanto

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Mahir Matematika untuk Kelas XII SMA/MA Program Bahasa Geri Achmadi, dkk.

Mahir Matematika 3

untuk Kelas XII SMA/MA

Program Bahasa

Geri Achmadi
Dwi Gustanti
Dani Wildan Hakim
Willi Sutanto

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

Mahir Matematika 3

untuk Kelas XII SMA/MA Program Bahasa

Penulis : Geri Achmadi
Dwi Gustanti
Dani Wildan Hakim
Willi Sutanto

Ukuran Buku : 21 x 29,7 cm

510.07
MAH ACHMADI, Geri
m Mahir matematika 3: untuk kelas XII SMA/MA Program Bahasa/
Oleh Geri Achmadi...[et.al]. — Jakarta: Pusat Perbukuan,
Departemen Pendidikan Nasional, 2007.
viii, 106 hlm.: ilus.; 30 cm.
Bibliografi: hlm. 106
Indeks. Hlm.105
ISBN 979-462-845-X
1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul II. Gustanti, Dwi
III. Hakim, Dani Wildan IV. Sutanto, Willi

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2007, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui *website* Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional tersebut, dapat diunduh *(down load),* digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga peserta didik dan pendidik di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

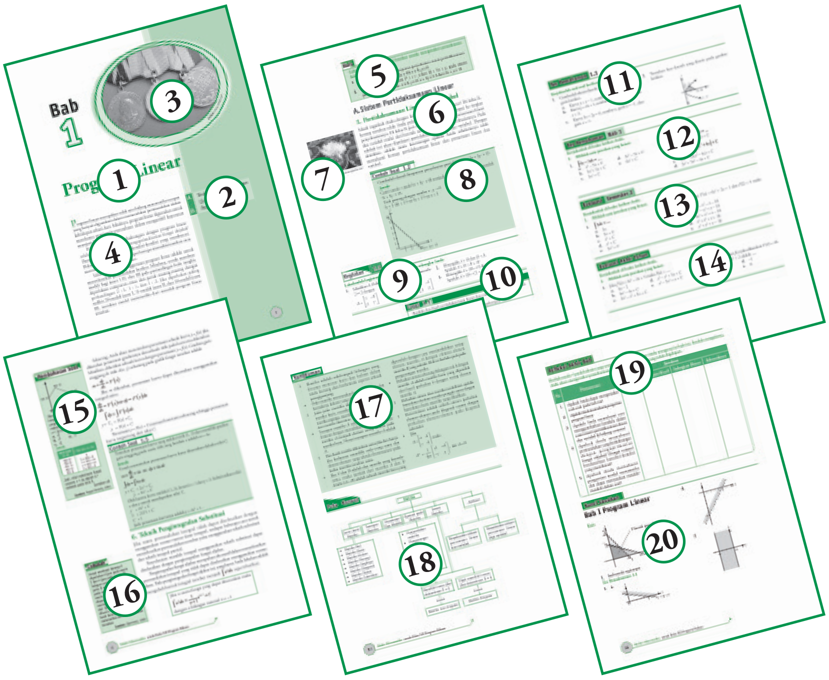
Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Selanjutnya, kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, 25 Februari 2008

Panduan Belajar

Buku ini disusun berdasarkan Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar kurikulum, terdiri atas 3 bab, yaitu Program Linear, Matriks, serta Barisan dan Deret. Materi pembelajaran disajikan secara logis, sistematis, dan terstruktur dengan bahasa yang mudah dimengerti. Untuk mendukung proses pembelajaran, materi dikemas sedemikian rupa sehingga memperhatikan aspek penalaran, pemecahan masalah, keterkaitan, komunikasi, aplikasi, dan pengayaan. Buku ini juga ditata dengan format yang menarik, dilengkapi dengan foto dan ilustrasi sehingga memperjelas konsep yang sedang dipelajari.

Sebaiknya anda mengenal bagian-bagian buku ini terlebih dahulu, yaitu sebagai berikut.



1. **Judul Bab**
2. **Judul-Judul Subbab**
3. **Gambar Pembuka Bab**
4. **Pengantar Pembelajaran**
5. **Kuis**
6. **Materi Pembelajaran**
7. **Gambar atau Ilustrasi**
8. **Contoh Soal dan Jawabannya**
9. **Kegiatan**
10. **Tugas**
11. **Tes Pemahaman Subbab**
12. **Tes Pemahaman Bab**
13. **Evaluasi Semester**
14. **Evaluasi Akhir Tahun**
15. **Pembahasan Soal**
16. **Cobalah**
17. **Rangkuman**
18. **Peta Konsep**
19. **Refleksi Akhir Bab**
20. **Kunci Jawaban**

Setelah mengenal bagian-bagian buku ini, perhatikanlah petunjuk mempelajari buku agar siswa mudah memahami materi pembelajaran yang terdapat di dalamnya.

1. Bacalah **Pengantar Pembelajaran** setiap bab untuk memberikan gambaran utuh tentang materi yang akan dipelajari dan kegunaannya dalam kehidupan.
2. Cobalah kerjakan soal-soal **Kuis** yang terdapat pada setiap bab. Siswa dapat mengerjakan soal-soal tersebut atau melanjutkan ke materi.
3. Pahamilah setiap konsep matematika yang diberikan dengan mengamati dan mendiskusikan **Contoh Soal** dan jawaban yang diberikan.
4. Lakukanlah setiap **Tugas** dan **Kegiatan** yang terdapat dalam isi bab untuk memperluas wawasan serta membangun dan memperkuat konsep.
5. Evaluasilah hasil belajar siswa dengan mengerjakan soal-soal **Tes Pemahaman Subbab**, **Tes Pemahaman Bab**, **Evaluasi Semester**, dan **Evaluasi Akhir Tahun**. Jika ada kesulitan, baca dan pahami kembali materi terkait yang telah dipelajari sampai siswa dapat memecahkan soal-soal itu. Untuk mengecek apakah jawaban sudah benar atau belum, Siswa dapat merujuk ke **Kunci Jawaban** soal-soal terpilih.
6. Pelajarilah soal-soal nonrutin dan jawabannya yang terdapat dalam sub-bab **Pembahasan Soal** yang berguna untuk memperkaya teknik-teknik identifikasi masalah dan pemecahannya dengan menggunakan konsep-konsep yang telah dipelajari. Lanjutkan dengan mengerjakan soal-soal pada sub-bab **Cobalah** untuk menguji kepiawaian Siswa dalam memecahkan masalah.
7. Untuk mengetahui sejauh mana penguasaan siswa terhadap materi dalam suatu bab, isilah **Refleksi Akhir Bab** pada tiap-tiap akhir bab dengan jujur. Ikuti rekomendasi hasil Uji Ketuntasan Belajar ini sehingga siswa memiliki kompetensi terkait dengan materi yang telah dipelajari.

Selamat Belajar.

Prakata

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan sains dan teknologi, serta berperan besar dalam mengembangkan daya pikir manusia. Oleh karena itu, pembelajaran matematika di sekolah merupakan salah satu pilar penting dalam meningkatkan kualitas sumber daya manusia. Keberhasilan proses pembelajaran matematika tentu saja bergantung pada banyak faktor, di antaranya ketersediaan buku-buku buku-buku pelajaran matematika yang disusun berdasarkan Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar Kurikulum.

Buku ini dimaksudkan sebagai panduan belajar siswa dalam mempelajari matematika di sekolah untuk mendukung keberhasilan proses belajar mengajar. Tentu saja buku ini akan memperkaya perbendaharaan buku-buku matematika yang sudah ada. Dengan demikian, penulis berharap buku ini dapat menjadi penunjang yang mendukung tercapainya tujuan umum pendidikan dan pembelajaran matematika.

Dalam penulisannya, buku ini mengacu pada dokumen Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar kurikulum yang berlaku, serta buku-buku referensi tentang matematika, di samping dari pengalaman mengajar di kelas. Sebagai sebuah karya penulisan, tentu saja buku ini tidak lepas dari keterbatasan dan kekurangan. Karenanya, penulis mengharapkan kritik yang membangun demi perbaikan dan penyempurnaan buku ini.

Tidak lupa, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu, baik langsung maupun tidak langsung dalam penulisan buku ini.

Bandung, Oktober 2007
Penulis

Daftar Isi

Semester 2

Bab

1

Sumber: www.medali.com

Program Linear

Program linear merupakan salah satu bidang matematika terapan yang banyak digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, program linear digunakan untuk membantu pemimpin perusahaan dalam mengambil keputusan manajerial.

Permasalahan yang berhubungan dengan program linear selalu berhubungan dengan proses mengoptimalkan fungsi objektif (fungsi tujuan) berdasarkan kondisi-kondisi yang membatasi. Dalam hal ini, optimalisasi dapat berupa memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan.

Salah satu contoh penggunaan program linear adalah untuk menyelesaikan permasalahan berikut. Misalnya, membuat medali bagi juara I, II, dan III pada pertandingan bulu tangkis, diperlukan campuran emas dan perak masing-masing dengan perbandingan 2 : 1, 1 : 1, dan 1 : 2. Jika setiap juara memerlukan paling sedikit 20 medali untuk juara I, 15 medali untuk juara II, dan 10 medali untuk juara III, tentukan model matematika dari masalah program linear tersebut.

Kuis

Cobalah kerjakan soal-soal berikut untuk mengetahui pemahaman Anda mengenai bab ini.

1. Tentukan daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut. $2x + y \leq 40$; $x + 2y \leq 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
2. Tentukan nilai maksimum $P = x + y$ dan $Q = 5x + y$, pada sistem pertidaksamaan berikut. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 12$ dan $2x + y \leq 12$

A. Sistem Pertidaksamaan Linear

1. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Masih ingatkah Anda dengan konsep pertidaksamaan linear? Di Kelas X, konsep tersebut telah Anda pelajari tentang bentuk dan penyelesaiannya. Di Kelas X pun Anda telah mempelajari persamaan linear dua variabel baik bentuk-bentuknya maupun penyelesaiannya. Pada subbab ini akan dipelajari pertidaksamaan linear dua variabel. dan suatu keuntungan apabila Anda pernah memahami konsep pertidaksamaan linear dan persamaan linear dua variabel.

Bentuk pertidaksamaan linear dua variabel sama dengan bentuk pertidaksamaan linear satu variabel, pertidaksamaan linear dua variabel memiliki dua variabel (peubah). Adapun pertidaksamaan linear satu variabel hanya memiliki satu peubah. Begitu pula dengan persamaan linear dua variabel sama dengan pertidaksamaan linear dua variabel, hanya saja berbeda dalam tanda ketidaksamaannya. Pada persamaan linear dua variabel, digunakan tanda hubung " = " sedangkan pertidaksamaan linear dua variabel digunakan tanda hubung " >, <, ≥, atau ≤ ".

Definisi

Definisi Pertidaksamaan Linear Dua Variabel
Pertidaksamaan linear dua variabel adalah kalimat terbuka matematika yang memuat dua variabel, dengan masing-masing variabel berderajat satu dan dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan. Tanda ketidaksamaan yang dimaksud adalah >, <, ≥, atau ≤.

Bentuk umum pertidaksamaan linear dua variabel sama dengan bentuk umum persamaan linear dua variabel. Seperti yang sudah disinggung sebelumnya, perbedaannya terletak pada tanda ketidaksamaan. Pada persamaan digunakan tanda " = ", sedangkan pada pertidaksamaan digunakan tanda " >, <, ≥, atau ≤ ". Berikut bentuk umum dari pertidaksamaan linear dua variabel.

$ax + by > c$
$ax + by < c$
$ax + by \geq c$
$ax + by \leq c$

Dengan :
a = koefisien dari x, $a \neq 0$
b = koefisien *dari* y, $b \neq 0$
c = konstanta
a, b, dan c anggota bilangan real.

Info Matematika

Penggunaan simbol ≥ dan ≤, telah ada sejak tahun 1631, setelah karya *Artist Analyticae Praxis*. Meskipun Oughtred telah mengembangkan beberapa variasi simbol pertidaksamaan pada abad ke–18, namun simbol yang paling umum digunakan adalah simbol yang dibuat Harrior.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika*

Anda telah mengenal dan mengetahui definisi serta bentuk umum dari suatu pertidaksamaan linear dua variabel. Sekarang, Anda tentu dapat membedakan yang manakah di antara pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel.

1. $2x < 15$ **4.** $x^2 + 2y \leq 5$

2. $2x + 3y \geq 6$ **5.** $-x \geq y + 1$

3. $xy + x > 3$

Manakah di antara pertidaksamaan-pertidaksamaan tersebut yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel? Dari ke lima nomor pertidaksamaan tersebut, yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel adalah pertidaksamaan nomor 2 dan 5. Pertidaksamaan nomor 1, merupakan pertidaksamaan linear satu variabel. Pertidaksamaan nomor 3 bukanlah pertidaksamaan linear dua variabel karena pada pertidaksamaan tersebut memuat perkalian variabel. Pertidaksamaan nomor 4 juga bukan pertidaksamaan linear dua variabel karena ada variabel yang derajatnya lebih dari satu.

Penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linear dua variabel berupa pasangan terurut (a, b) yang memenuhi pertidaksamaan linear dua variabel. Semua penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel disatukan dalam suatu himpunan penyelesaian. Himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linear dua variabel biasanya disajikan dalam bentuk grafik pada bidang koordinat *cartesius*.

Langkah-langkah yang harus diambil untuk menggambarkan grafik penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel, hampir sama dengan langkah-langkah dalam menggambarkan grafik persamaan linear dua variabel.

Berikut ini langkah-langkah mencari daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear dua variabel.

a. Ganti tanda ketidaksamaan $>$, $<$, $\geq$, atau $\leq$ dengan tanda " = ".

b. Tentukan titik potong koordinat *cartesius* dari persamaan linear dua variabel dengan kedua sumbu.
   - Titik potong dengan sumbu x, jika $y = 0$ diapit titik (x,0)
   - Titik potong dengan sumbu y, jika $x = 0$ diapit titik (0,y)

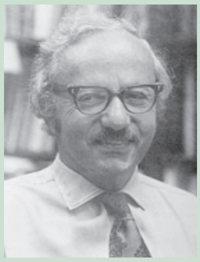
c. Gambarkan grafiknya berupa garis yang menghubungkan titik (x,0) dengan titik (0,y). Jika pertidaksamaan memuat > atau <, gambarkanlah grafik tersebut dengan garis putus-putus.

d. Gunakanlah sebuah titik uji untuk menguji daerah penyelesaian pertidaksamaan.

e. Berikanlah arsiran pada daerah yang memenuhi himpunan penyelesaian pertidaksamaan.

Tokoh Matematika

George Bernard Dantzig
(1914 - 2005)



George Bernard Dantzig mendapat gelar Ph.D. (Philosopy Doctor) dari Universitas California. Pada tahun 1947 ia bekerja di bagian perencanaan Angkatan Udara Amerika Serikat. Semua orang mengetahui bahwa sangat sulit mengokordinasikan persediaan, peralatan dan prajurit secara efisien. Akan tetapi, Dantig berhasil memformulasikan Angkata Udara Amerika Serikat sebagai masalah program linear. Masalah yang dihadapi memuat beribu variabel yang sulit dipecahkan dan Dantzig berhasil mengkoordinasikan persediaan, peralatan, dan prajurit secara efisien.

Sumber: Finite Mathematic and Its Application,1998

Contoh Soal 1.1

Gambarlah daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x + 4y \leq 12, x, y \in R$.

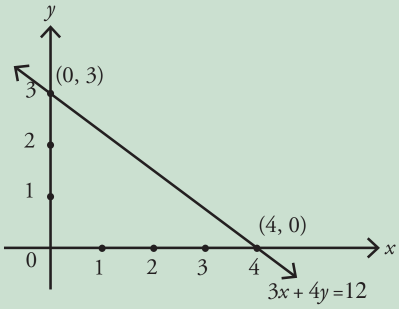
Jawab:

$3x + 4y \leq 12$, ganti tanda ketidaksamaan sehingga diperoleh garis $3x + 4y = 12$.

- Titik potong dengan sumbu x, $y = 0$

  $3x + 4(0) = 12 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

- Titik potong dengan sumbu y, $x = 0$
  $3(0) + 4y = 12 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow y = 3$
- Titik potong dengan sumbu koordinat di (4, 0) dan (0, 3). Diperoleh grafik $3x + 4y = 12$.



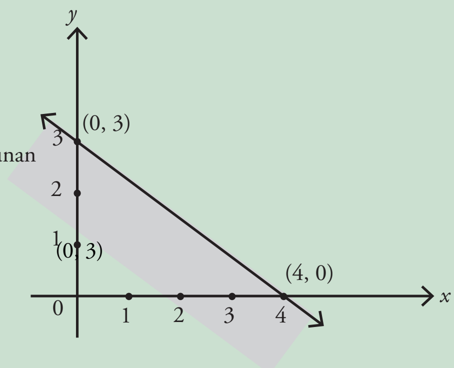
Ambil titik uji (0, 0) untuk mendapatkan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $3x + 4y \leq 12$, diperoleh $3(0) + 4(0) \leq 12$

$0 \leq 12$ (Benar)

Dengan demikian, titik (0, 0) memenuhi pertidaksamaan

$3x + 4y \leq 12$

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan adalah daerah di bawah garis batas (yang diarsir).



Gambar 1.1: Grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x + 4y \leq 12$

Contoh Soal 1.2

Gambarlah daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan $5x + 3y > 15$.

Jawab:

Ganti tanda > pada $5x + 3y > 15$ menjadi tanda " = " sehingga diperoleh $5x + 3y = 15$.

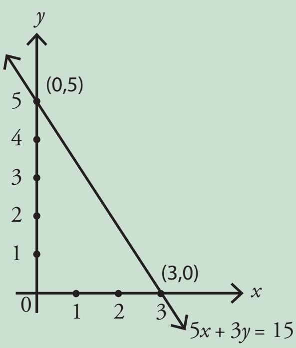
Titik potong dengan sumbu x, $y = 0$

$5x + 3(0) = 15 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$

Titik potong dengan sumbu y, $x = 0$

$5(0) + 3y = 15 \Leftrightarrow 3y = 15 \Leftrightarrow y = 5$

sehingga diperoleh titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y, masing-masing di titik (3, 0) dan (0, 5). Dengan demikian, grafiknya adalah



Gambar 1.2 : Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $5x + 3y = 15$

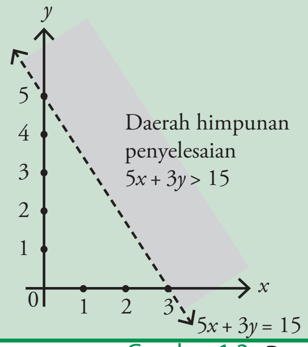
Ambil titik uji (0, 0) untuk menentukan daerah penyelesaian dari

$5x + 3y > 15$

$5\,(0) + 3\,(0) > 15$

$0 > 15$ *tidak memenuhi*

Oleh karena (0, 0) tidak memenuhi $5x + 3y > 15$ maka himpunan penyelesaiannya berada di sebelah kanan kurva. Kurva pertidaksamaan tersebut digambarkan dengan garis putus-putus.



Gambar 1.3 : Daerah himpunan penyelesaian 5x + 3y > 15

Tugas 1.1

Buatlah dua buah pertidaksamaan linear dua variabel. Kemudian, tentukan daerah himpunan penyelesaiannya.
Mintalah teman Anda untuk memeriksa hasil pekerjaan Anda.

2. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Jika Anda memiliki dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel, dan pertidaksamaan tersebut saling berkaitan maka terbentuklah suatu sistem. Sistem inilah yang dinamakan sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

Definisi

Definisi Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel
Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem yang terdiri atas dua atau lebih pertidaksamaan dan setiap pertidaksamaan tersebut mempunyai dua variabel.

Langkah-langkah menentukan daerah) penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel sebagai berikut.

a. Gambarkan setiap garis dari setiap pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan dalam sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

b. Gunakanlah satu titik uji untuk menentukan daerah yang memenuhi setiap pertidaksamaan linear dua variabel. Gunakan arsiran yang berbeda untuk setiap daerah yang memenuhi pertidaksamaan yang berbeda.

c. Tentukan daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear, yaitu daerah yang merupakan irisan dari daerah yang memenuhi pertidaksamaan linear dua variabel pada langkah b.

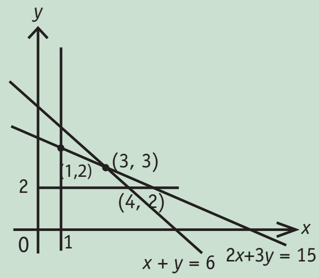
Supaya Anda memahami langkah-langkah dalam menentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel, pelajari contoh soal berikut.

Pembahasan Soal

Dalam himpunan pnyelesaian pertidaksamaan $x \geq 1$, $y \geq 2$, $x + y \leq 6$, dan $2x + 3y \leq 15$, nilai minimum dari $3x + 4y$ sama dengan ....

a. 9 **d.** 12
b. 10 **e.** 13
c. 11

Jawab:



F(x, y) minimum pada x terkecil dan y terkecil yaitu pada titik $A(1, 2)$

$F(x, y) = 3x + 4y$

$F(1, 2) = 3(1) + 4(2) = 11$

Jawaban: **c**

Sumber: *UMPTN*, 1998

Contoh Soal 1.3

Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear berikut.

$5x + 4y \leq 20$

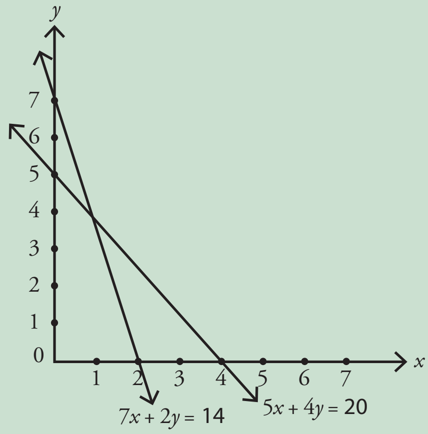
$7x + 2y \leq 14$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Jawab:

Gambarkan setiap garis batas dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel, yaitu $5x + 4y = 20$, $7x + 2y = 14$, $x = 0$ (sumbu y), $y = 0$ (sumbu x).



Gambar 1.4 : Himpunan penyelesaian 5x + 4y = 20, 7x + 2y = 14

Gambar 1.4 : Memperlihatkan 5x + 4y = 20 dan 7x + 2y = 14

Gunakan titik uji (0, 0) pada setiap pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan

- $5x + 4y \leq 20$

  $5(0) + 4(0) \leq 20$

  $0 \leq 20$ *(memenuhi)*

Daerah yang memenuhi berada di sebelah kiri garis $5x + 4y = 20$

- $7x + 2y \leq 14$

  $7(0) + 2(0) \leq 14$

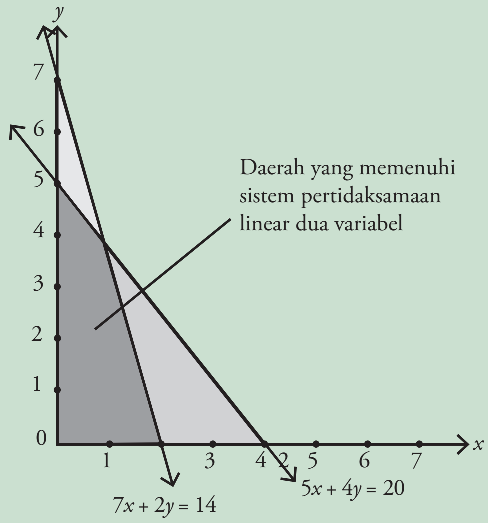
  $0 \leq 14$ *(memenuhi)*

  Daerah yang memenuhi berada di sebelah kiri garis $7x + 2y = 14$

- $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

  Daerah yang memenuhi berada di kuadran I.

  Dengan pola yang berbeda, arsirlah *(raster)* setiap daerah yang memenuhi setiap pertidaksamaan linear dua variabel tersebut, seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 1.5 : Bentuk Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Gambar 1.5 : Memperlihatkan Daerah hitam yang memenuhi pertidaksamaan linear dua variabel $5x + 4y \leq 20$, $7x + 2y \leq 14$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Contoh Soal 1.4

Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear berikut.

$x + 2y \geq 6$

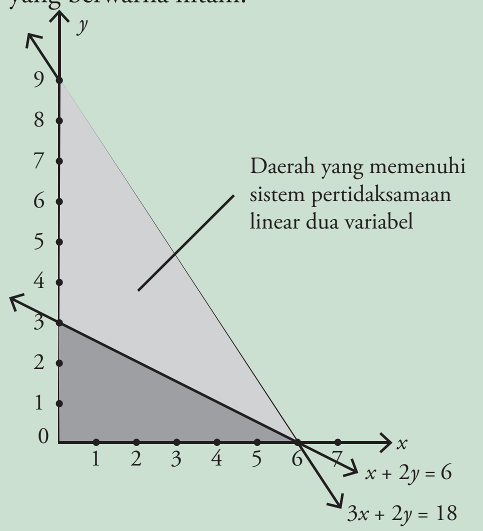
$3x + 2y \leq 18$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Jawab:

Lukis keempat garis batas dari sistem pertidaksamaan linear tersebut, yaitu $x + 2y = 6$, $3x + 2y = 18$, $x = 0$ (sumbu y), dan $y = 0$ (sumbu x), seperti pada gambar di bawah. Dengan menggunakan titik uji (0, 0), diperoleh hasil akhir berupa daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan seperti pada Gambar 1.6, yaitu daerah yang berwarna hitam.



Gambar 1.6 : memperlihatkan Daerah abu-abu tua yang memenuhi pertidaksamaan linear x + 2y = 6, 3 x + 2y = 18

Dalam sistem pertidaksamaan linear dua variabel, Siswa tidak hanya diminta untuk mencari daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan. Kadang-kadang, siswa juga diminta untuk membuat persamaan atau pertidaksamaan linear dari yang diberikan. Tentunya, Anda harus mengingat kembali tentang persamaan garis yang telah dipelajari.

Jika garis batas yang akan diberikan pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear memotong sumbu koordinat-x dan koordinat-y di titik $(b, 0)$ dan $(0, a)$ maka persamaan garisnya adalah

$$\boxed{\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1} \quad \text{atau} \quad \boxed{ax + by = ab}$$

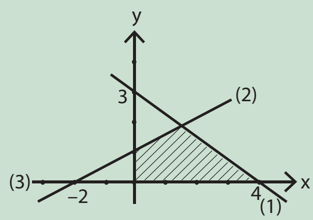
Jika garis batas diberikan pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) maka persamaan garisnya adalah

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1) \text{ dengan } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

atau

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

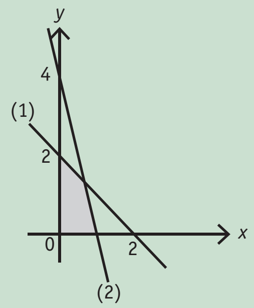
Cobalah



Tentukan sistem pertidaksamaan daerah linier jika daerah yang merupakan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan yang dicari diarsir pada gambar di atas.

Sumber: Ebtanas, 1997

Cobalah

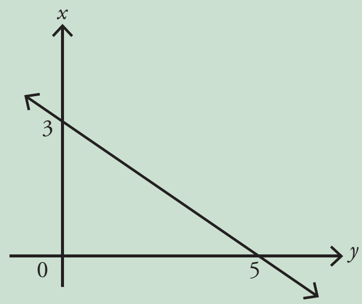


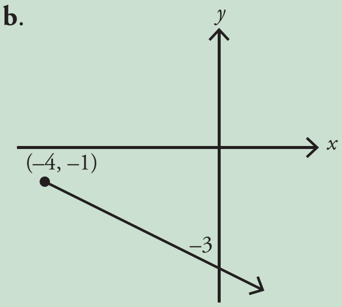
Tentukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah penyelesaian yang diarsir pada gambar di atas.

Sumber: *Ebtanas*, 1997

Contoh Soal 1.5

Tentukan persamaan garis dari gambar berikut.

a. 

b. 

Jawab:

a. Berdasarkan gambar tersebut, diketahui bahwa garis memotong sumbu-x di titik (5, 0) dan memotong sumbu-y di titik (0, 3) sehingga persamaan garisnya adalah

$ax + by = ab$ $\quad a = 3$ dan $b = 5$

maka $3x + 5y = 5 \times 3$

$3x + 5y = 15$

b. Berdasarkan gambar tersebut, diketahui bahwa garis melalui titik (0, –3) dan titik (–4, –1) sehingga persamaan garisnya adalah

$\frac{y - y_1}{y_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ dengan $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $y_1 = -3$, dan $y_2 = -1$

maka $\frac{y - (-3)}{-1 - (-3)} = \frac{x - 0}{-4 - 0}$

$\frac{y + 3}{-1 + 3} = \frac{x}{-4}$

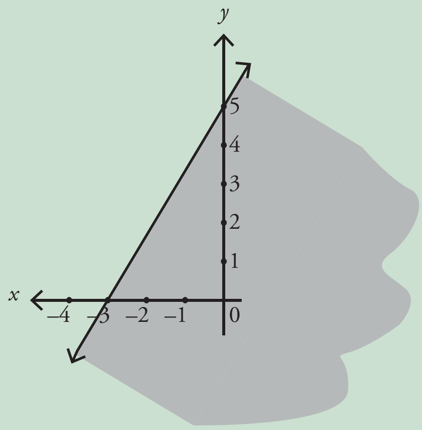
$-4(y + 3) = 2x$

$-2y - 6 = \text{x}$

$x + 2y = -6$

Contoh Soal 1.6

Tentukan pertidaksamaan yang memenuhi daerah penyelesaian berikut.



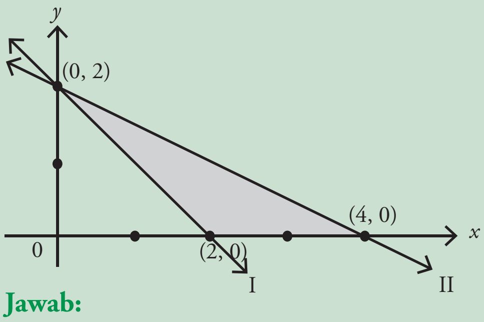
Jawab:

Berdasarkan gambar, diketahui garis batas tersebut memotong sumbu-x di titik (–3, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, 5) sehingga persamaan garisnya adalah

$ax + by = ab$ dengan $a = 5$ dan $b = -3$
maka $5x + (-3y) = 5 \times (-3)$
$5x - 3y = -15$
Untuk menentukan tanda pertidaksamaannya, gunakan titik uji yang terdapat pada daerah yang diarsir. Ambil titik uji (0, 0).
Titik uji (0, 0) terhadap garis $5x - 3y = -15$
$5x - 3y$ ... -15
$5(0) - 3(0)$ ... -15
$0 > -15$ (memenuhi)
Garis $5x - 3y = -15$. Jika digambarkan secara utuh maka pertidaksamaan yang memenuhi daerah penyelesaian tersebut adalah $5x - 3y \geq -15$

Contoh Soal 1.7

Daerah yang diarsir pada gambar berikut merupakan grafik himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan. Tentukan sistem pertidaksamaan yang dimaksud.



Jawab:
Untuk mencari persamaan garisnya (sebelum dicari pertidaksamaannya), Anda dapat mempergunakan rumus yang pertama ataupun kedua karena kedua garis memotong sumbu-x dan sumbu-y.
Gunakan rumus

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{atau} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

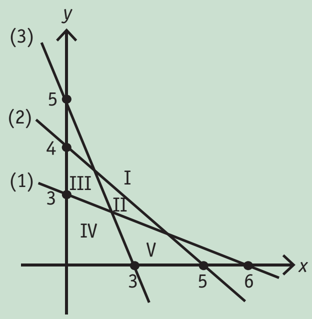
- Garis I melalui titik (2, 0) dan (0, 2) maka persamaan garisnya

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{0 - 2}(x - 2)$$
$$y = \frac{2}{-2}(x - 2)$$
$$y = -1\,(x - 2)$$
$$y = -x + 2$$
$$x + y = 2 \qquad \ldots(1)$$

- Garis II melalui titik (4, 0) dan (0, 2) maka persamaan garisnya

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{0 - 4}(x - 4)$$
$$y = \frac{2}{-4}(x - 4)$$
$$y = -\frac{1}{2}(x - 4)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$\frac{1}{2}x + y = 2 \quad \text{atau } x + 2y = 4 \qquad \ldots(2)$$

Cobalah



Pada gambar tersebut yang merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $x + 2y \geq 6$, $4x + 5y \leq 20$, dan $2x + y \geq 6$, adalah daerah ...

Sumber: *Ebtanas*, 1998

Gunakan titik uji yang terdapat pada daerah penyelesaian. Ambil titik uji (3, 0).

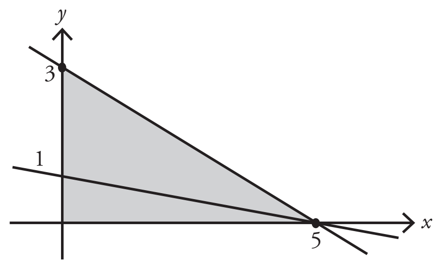
- Titik uji (3, 0) terhadap garis I (persamaan (1))
  $x + y \dots 2$
  $3 + 0 \dots 2$
  $3 > 2$
  Jadi, pertidaksamaan linear dua variabelnya adalah $x + y \geq 2$
- Titik uji (3, 0) terhadap garis II (persamaan(2))
  $x + 2y \dots 4$
  $3 + 2\ (0) \dots 4$
  $3 < 4$
  Jadi, pertidaksamaan linear dua variabelnya adalah $x + 2y \leq 4$.

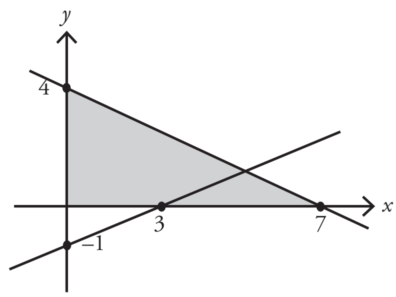
Oleh karena daerah penyelesaian pada gambar tersebut berada di kuadran I maka daerah penyelesaian tersebut memenuhi pertidaksamaan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Sistem pertidaksamaan linear dari daerah penyelesaian pada gambar tersebut adalah

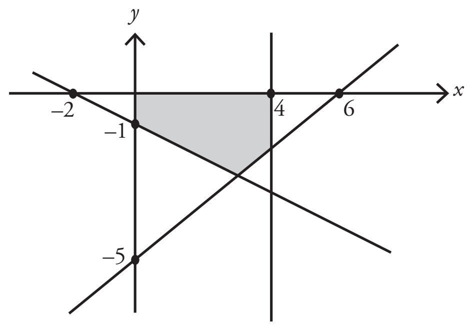
$x + y \geq 2$
$x + 2y \leq 4$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Tes Pemahaman 1.1

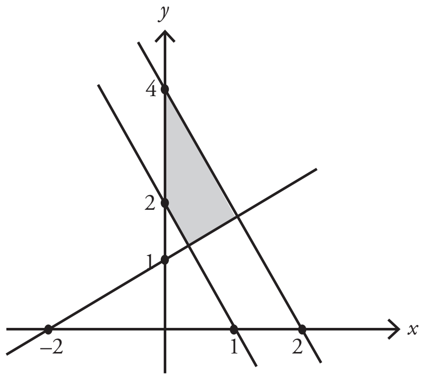
Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan daerah penyelesaian dari pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut pada bidang koordinat *cartesius*.
   a. $x + 3y \geq 6$ **e.** $12x - 5y \leq 60$
   b. $x + 4y \leq 8$ **f.** $-4 \leq x \leq 0$
   c. $2x - 3y \geq 8$ **g.** $3x + 4x \geq 1.200$
   d. $6x - 5y < 30$ **h.** $-2x - 3y < -6.000$
2. Tentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut ini pada bidang koordinat *cartesius*.
   a. $2x + y \leq 6$, $x + 3y \geq 9$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   b. $x + 2y \leq 12$, $2x + y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   c. $x - 4y \leq 8$, $3x + 4y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   d. $4x + 4y \geq 16$, $3x + 5y \geq 15$, $7x + 5y \leq 35$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   e. $4x + 4y \geq 16$, $3x + 4y \leq 24$, $7x + 5y \leq 35$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
   f. $2x - 3y \leq 12$, $x + 3y \geq 6$, $0 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$
3. Tentukan sistem pertidaksamaan linear untuk daerah yang diarsir pada bidang koordinat *cartesius* berikut ini.
   a.
   

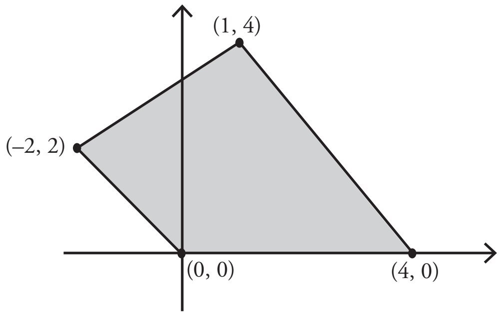
   b.
   

   c.
   

d.



e.



4. Buatlah 2 contoh sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Kemudian, tentukan daerah penyelesaiannya pada bidang koordinat *cartesius*.
5. Buatlah 2 contoh daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel (pada koordinat *cartesius*). Kemudian, tentukanlah sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang memenuhi daerah penyelesaian tersebut.
6. Seorang pemborong pengecatan rumah mempunyai persediaan 80 kaleng cat berwarna putih dan 60 kaleng cat berwarna abu-abu. Pemborong tersebut mendapat tawaran untuk mengecat ruang tamu dan ruang tidur. Setelah dihitung, ternyata 1 ruang tamu menghabiskan 2 kaleng cat putih dan 1 kaleng cat abu-abu, sedangkan 1 ruang tidur menghabiskan 1 kaleng cat putih dan 1 kaleng cat abu-abu. Jika banyak ruang tamu x buah dan banyaknya ruang tidur y buah, dapatkah Anda menentukan sistem pertidaksamaan dari permasalahan tersebut?

B. Program Linear

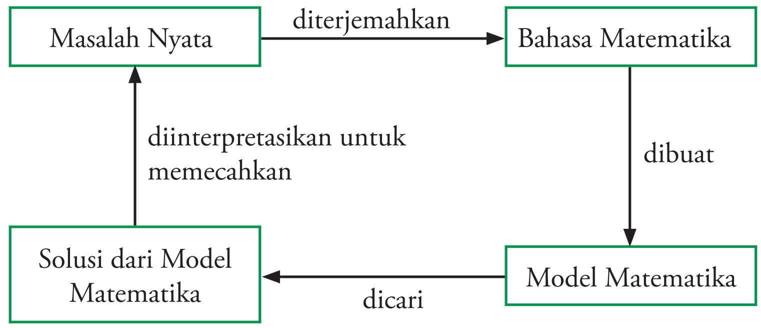
Pada subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari mengenai pertidaksamaan linear dua variabel dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Konsep yang telah Anda pelajari tersebut, akan dipergunakan kembali dalam memecahkan masalah program linear yang akan dipelajari pada subbab ini.

Program linear merupakan salah satu bagian dari matematika terapan yang dapat digunakan dalam memecahkan berbagai macam persoalan yang timbul dalam kehidupan sehari-hari. Sebelum Anda belajar lebih jauh mengenai program linear, terlebih dahulu Anda akan diperkenalkan pada model matematika berikut.

1. Model Matematika

Permasalahan yang Anda hadapi dalam kehidupan sehari-hari adalah masalah nyata, bukan masalah yang langsung berbentuk angka ataupun hitungan-hitungan matematika. Masalah nyata yang akan Anda selesaikan ataupun dicari solusinya, dapat Anda temukan dalam berbagai bidang. Misalnya, dalam menjalani proses produksi pada suatu perusahaan, pastilah tersedia bahan baku, tenaga kerja, mesin, dan sarana produksi lainnya. Seorang pengusaha harus memperhitungkan semua faktor yang ada supaya perusahaannya dapat meminimumkan biaya produksi dan memaksimumkan keuntungan yang diperoleh.

Program linear dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah tersebut. Akan tetapi, masalah-masalah tersebut terlebih dahulu harus diterjemahkan ke dalam bahasa matematika sampai ke tingkat yang paling sederhana. Proses menterjemahkan masalah nyata ke dalam bahasa matematika dinamakan **pemodelan matematika**. Bagan proses pemodelan matematika dapat digambarkan sebagai berikut.



Proses Pemodelan Matematika

Supaya memahami proses pemodelan matematika tersebut, pelajarilah uraian berikut.

Misalkan seorang agen sepeda ingin membeli paling banyak 25 buah sepeda untuk persediaan. Ia ingin membeli sepeda model biasa dengan harga Rp1.200.000,00/buah dan sepeda model *sport* dengan harga Rp1.600.000,00/buah. Ia mempunyai modal Rp33.600.000,00. Ia berharap memperoleh untung Rp200.000,00 untuk setiap sepeda biasa dan Rp240.000,00 untuk setiap sepeda *sport*. Jika Anda diminta untuk memodelkan masalah ini, dengan harapan agen sepeda tersebut mendapatkan keuntungan maksimum, dapatkah Anda membantunya?

Untuk memodelkan permasalahan tersebut, langkah pertama dimulai dengan melakukan pemisalan. Pada permasalahan tersebut, ada 2 model sepeda yang ingin dibeli oleh agen, yaitu sepeda biasa dan sepeda *sport*.

Misalkan banyaknya sepeda biasa yang dibeli adalah x buah dan banyaknya sepeda *sport* yang dibeli adalah y buah. Oleh karena keuntungan yang diharapkan dari sepeda biasa dan *sport* berturut-turut adalah Rp200.000,00 dan Rp240.000,00 maka keuntungan yang mungkin diperoleh agen tersebut ditentukan oleh $z = f(x, y) = 200.000x + 240.000y$

Fungsi $z = f(x, y)$ tersebut dinamakan sebagai fungsi objektif (fungsi tujuan). Dari permasalahan yang ada, diinginkan untuk memaksimumkan keuntungan yang didasarkan pada kondisi-kondisi yang ada (kendala). Setiap kendala yang ada, bentuknya berupa pertidaksamaan. Fungsi kendala dari permasalahan agen sepeda tersebut ditentukan sebagai berikut:

- Banyaknya sepeda yang akan dibeli oleh agen tersebut
  $x + y \le 25$
- Besarnya modal yang dimiliki agen sepeda
  $1.200.000x + 1.600.000y \le 33.600.000$
  $15x + 20y \le 42$
- Banyaknya sepeda yang dibeli tentu tidak mungkin negatif sehingga nilai $x \ge 0$ dan $y \ge 0$.

Dengan demikian, terbentuklah model matematika berikut.

$z = f(x, y) = 200.00x + 240.000y$

Tujuannya memaksimumkan fungsi tujuan yang didasarkan pada kondisi

$x + y \le 25$

$15x + 20y \le 42$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

Pembahasan Soal

Tanah seluas 10.000 m² akan dibangun rumah tipe *A* dan tipe *B*. Untuk rumah tipe *A* diperlukan 100 m² dan tipe *B* seluas 75 m², rumah yang akan dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe *A* Rp 6.000.000,00/unit dan tipe *B* Rp 4.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut adalah ....

a. Rp550.000.000,00
b. Rp600.000.000,00
c. Rp700.000.000,00
d. Rp800.000.000,00
e. Rp900.000.000,00

Jawab:

Diketahui

Tipe $A = x$ unit (luas tanah 100 m², keuntungan Rp600.000.000,00)

Tipe $B = y$ unit (luas tanah 75 m², keuntungan Rp400.000.000,00)

Persediaan rumah 125 unit, luas tanahnya 10.000 m².

Model matematika

$x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 125$,
$100x + 75y \le 10.000$

Dengan bentuk objektif adalah $(6.000,00x + 4.000.000y)$

Titik Sudut	$f(x, y) = 6.000.000x + 4.000.000y$
(0, 0)	0
(100, 0)	600.000.000
(25, 100)	550.000.000
(0, 125)	500.000.000

Jadi, keuntungan maksimum hasil penjualan rumah tersebut sebesar Rp600.000.000,00.

Jawaban: **b**

Sumber: *UAN*, 2005

Model matematika dari setiap permasalahan program linear secara umum terdiri atas 2 komponen, yaitu:

1. Fungsi tujuan $z = f(x, y) = ax + by$ dan
2. Fungsi kendala (berupa pertidaksamaan linear)

Contoh Soal 1.8

Suatu lahan parkir memiliki luas 800 m^2 dan hanya mampu menampung 64 bus dan mobil. Sebuah mobil menghabiskan tempat 6 m^2 dan bus 24 m^2. Biaya parkir Rp1.500,00/mobil dan Rp2.500,00/bus. Pemilik lahan parkir mengharapkan penghasilan yang maksimum. Tentukan model matematika dari permasalahan tersebut.

Jawab:

Permasalahan tersebut dapat disusun dalam bentuk tabel seperti berikut.

	Mobil	Bus	Maksimum
Banyaknya kendaraan	x	y	64
Lahan yang dipakai	6	24	800
Penghasilan	1.500	2.500	–

- Keuntungan yang diharapkan, dipenuhi oleh fungsi tujuan berikut.
  $z = f(x, y) = 1.500x + 2.500y$
- Banyaknya mobil dan bus yang dapat ditampung di lahan parkir tersebut memenuhi pertidaksamaan $x + y \leq 64$
- Luas lahan yang dapat dipakai untuk menampung mobil dan bus memenuhi pertidaksamaan $6x + 24y \leq 800$
- Oleh karena x dan y berturut-turut menyatakan banyaknya mobil dan bus, maka $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Jadi, model matematika dari permasalahan tersebut adalah
fungsi tujuan $z = f(x, y) = 1.500x + 2.500y$
dengan fungsi kendala
$x + y \leq 64$
$6x + 24y \leq 800$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Cobalah

Untuk membuat barang *A* diperlukan 6 jam pada mesin I dan 4 jam pada mesin II. Adapun untuk membuat barang jenis *B*, memerlukan 2 jam pada mesin I dan 8 jam pada mesin II. Kedua mesin tersebut dioperasikan setiap harinya masing-masing tidak lebih dari 18 jam. Setiap hari dibuat x buah barang *A* dan y buah barang *B*. Tentukan model matematika dari masalah tersebut.

Sumber: *Sipenmaru*, 1985

Contoh Soal 1.9

Seorang pedagang menjual 2 jenis buah, yaitu semangka dan melon. Tempatnya hanya mampu menampung buah sebanyak 60 kg. Pedagang itu mempunyai modal Rp140.000,00. Harga beli semangka Rp2.500,00/kg dan harga beli melon Rp2.000/kg. Keuntungan yang diperoleh dari penjual semangka Rp 1.500,00/kg dan melon Rp1.250,00/kg. Tentukan model matematika dari permasalahan ini.

Jawab:

Permasalahan tersebut dapat disusun dalam bentuk tabel seperti berikut.

	Semangka	Melon	Maksimum
Banyaknya buah (kg)	x	y	60
Pembelian	2.500	2.000	140.000
Keuntungan	1.500	1.250	-

Sumber: *www.balipost.com*

Gambar 1.7
Penjual semangka dan melon

- Keuntungan yang diharapkan, dipenuhi oleh fungsi tujuan berikut.
  $z = f(x, y) = 1.500x + 1.250y$
- Banyaknya buah semangka dan melon yang dapat ditampung di tempat pedagang tersebut memenuhi pertidaksamaan berikut.
  $x + y \leq 60$
- Banyaknya buah semangka dan melon yang dapat dibeli oleh pedagang memenuhi pertidaksamaan berikut.
  $2.500x + 2.000y \leq 140.000$
- Oleh karena x dan y berturut-turut menyatakan banyaknya buah semangka dan melon maka $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Jadi, model matematika dari permasalahan tersebut adalah
fungsi tujuan $z = f(x, y) = 1.500x + 1.250y$
dengan fungsi kendala
$x + y \leq 60$
$2.500x + 2.000y \leq 140.000$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

2. Masalah Program Linear

Cobalah

Sepuluh tahun yang lalu, umur A dua kali umur B. lima tahun kemudian umur A menjadi $1\frac{1}{2}$ kali umur B.
Berapa tahun umur A sekarang?

Program linear akan sangat berguna bagi Anda ketika dihadapkan pada beberapa pilihan dengan kendala-kendala tertentu, yang menuntut Anda untuk mengambil keputusan yang optimum (maksimum atau minimum). Oleh karena itu, permasalahan dalam program linear selalu berhubungan dengan pengoptimalisasian fungsi tujuan berdasarkan kendala yang membatasinya.

Suatu program linear dua variabel x dan y memiliki satu fungsi tujuan yang dioptimumkan. Bentuk umum dari fungsi tujuan tersebut adalah sebagai berikut.

$z = f(x, y) = ax + by$ dengan a, b bilangan real, $a \neq 0$ dan $b \neq 0$

Pada Contoh Soal 1.9 , fungsi tujuan yang ingin dimaksimumkan adalah $z = f(x, y) = 1.500x + 1.250y$, dan fungsi kendalanya adalah
$x + y \leq 60$
$2.500x + 2.000y \leq 140.000$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Tujuan dari permasalahan tersebut adalah menentukan banyaknya buah semangka dan melon yang harus dibeli/disediakan agar diperoleh keuntungan maksimum.

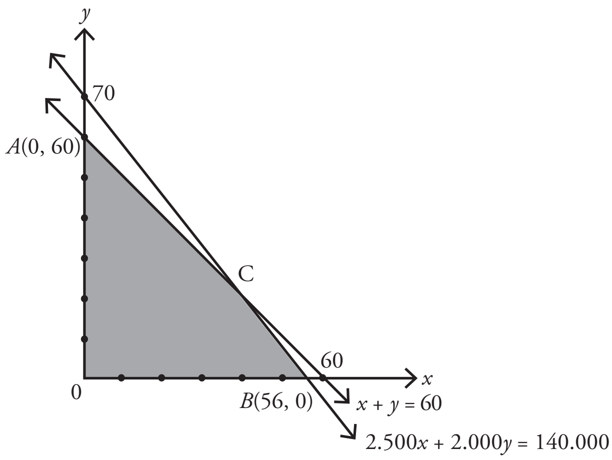
Dalam memaksimumkan suatu fungsi tujuan $z = ax + by$, Anda perlu menentukan titik-titik (x, y) yang menghasilkan nilai z terbesar. Titik (x, y) yang menghasilkan nilai z terbesar harus memenuhi setiap pertidaksamaan linear pada fungsi kendala yang diberikan. Hampir sama dengan hal itu, dalam meminimumkan suatu fungsi, Anda perlu menentukan titik-titik (x, y). Namun dalam meminimumkan fungsi tujuan, dicari titik (x, y) yang menghasilkan nilai z terkecil.

Berdasarkan uraian tersebut, diketahui bahwa model matematika yang diperoleh pada Contoh Soal 1.9 merupakan contoh permasalahan dalam upaya memaksimumkan fungsi tujuan.

Dengan demikian, masalah program linearnya sebagai berikut. fungsi tujuan $z = f(x, y) = 1.500x + 1.250y$ dengan kendalanya adalah

$x + y \le 60$
$2.500x + 2.000y \le 140.000$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

Dengan menggunakan konsep sistem pertidaksamaan linear dua variabel, diperoleh daerah penyelesaian seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.8
Grafik himpunan penyelesaian program linear
$x + y \le 60$
$2.500x + 2.000y \le 140.000$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

Selanjutnya, cari koordinat titik C yang merupakan perpotongan antara garis $x + y = 60$ dan $2.500x + 2.000y = 140.000$.
Gunakan metode gabungan eliminasi dan substitusi

$$\begin{array}{ll|l|rl}
x + y = 60 & & \times 2.000 & 2.000x + 2.000y & = 120.000 \\
2.500x + 2.000y = 14.000 & & \times 1 & 2.500x + 2.000y & = 140.000 \\ \hline
 & & & -500x & = -20.000 \\
 & & & x & = 40
\end{array} \; -$$

Substitusikan nilai $x = 40$ ke persamaan $x + y = 60$ diperoleh

$40 + y = 60$
$y = 60 - 40$
$y = 20$

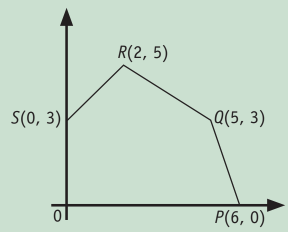
Jadi, koordinat titik C adalah (40, 20).

Dari permasalahan ini diketahui koordinat titik sudut daerah penyelesaian dari sistem tersebut adalah $A(0, 60)$, $B(56, 0)$, $C(40, 20)$ dan $O(0, 0)$. Oleh karena tujuan dari permasalahan ini adalah ingin memaksimumkan nilai z maka tentukan dari keempat titik tersebut yang membuat nilai z maksimum, dengan cara menyubstitusikannya ke fungsi $z = f(x, y) = 1.500x + 1.250y$.

- Untuk A (0, 60) maka
  $z = 1.500(0) + 1.250(60)$
  $= 75.000$
- Untuk B (56, 0) maka
  $z = 1.500(56) + 1.250(0)$
  $= 84.000$
- Untuk C (40, 20) maka
  $z = 1.500(40) + 1.250(20)$
  $= 85.000$
- Untuk O (0, 0) maka
  $z = 1.500(0) + 1.250(0)$
  $= 0$

Fungsi z maksimum di titik C (40, 20) dengan $z = 85.000$.

Pembahasan Soal



Jika segilima $OPQRS$ merupakan himpunan penyelesaian program linear maka nilai maksimum fungsi tujuan $x + 3y$ terletak di titik ....

a. O **d.** R
b. P **e.** S
c. Q

Jawab:

Titik Sudut (x, y)	$f(x, y) = x + 3y$
$O(0, 0)$	0
$P(6, 0)$	$6 + 3(0) = 6$
$Q(5, 3)$	$5 + 3(3) = 14$
$R(2, 5)$	$2 + 3(5) = 17$
$S(0, 3)$	$0 + 3(3) = 9$

Jadi, nilai maksimum fungsi tujuan $x + 3y$ adalah 17 yang terletak pada titik R.

Jawaban: **d**

Sumber: *Proyek Perintis*, 1981

Cobalah

Nilai maksimum dari $f(x, y) = 10x + 20y$ dengan kendala $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 4y \leq 120$, $x + y \leq 60$ adalah

Sumber: *SPMB*, 2004

Metode yang Anda gunakan pada uraian tersebut dikenal sebagai metode titik sudut. Secara umum, langkah-langkah dalam menentukan nilai optimum masalah program linear dengan fungsi tujuan

$$z = f(x, y) = ax + by$$

menggunakan metode titik sudut adalah sebagai berikut.

1. Buat model matematika dari masalah program linear yang diberikan.
2. Gambarkan grafik-grafik dari setiap pertidaksamaan linear dua variabel yang diketahui.
3. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang terdapat pada masalah (irisan dari setiap pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan).
4. Tentukan titik-titik sudut pada daerah himpunan penyelesaiannya.
5. Substitusikan titik-titik sudut tersebut ke dalam fungsi tujuan. Ambil nilai yang paling besar untuk penyelesaian maksimum, atau ambil nilai yang paling kecil untuk penyelesaian minimum. Titik yang memberikan nilai optimum (maksimum atau minimum) dinamakan titik optimum.

Contoh Soal 1.10

Tentukan nilai maksimum $f(x, y) = 3x + 4y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut.

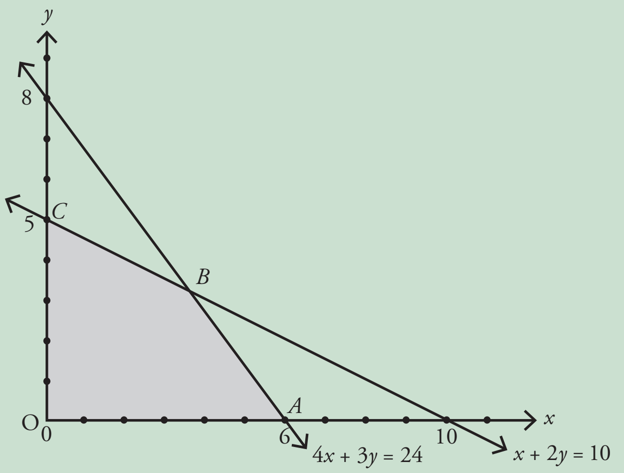
$x + 2y \leq 10$
$4x + 3y \leq 24$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Jawab:

Titik potong $x + 2y = 10$ dan $4x + 3y = 24$ dengan sumbu-x dan sumbu-y

- $x + 2y = 10$ memotong sumbu-x di titik $(10, 0)$
  $x + 2y = 10$ memotong sumbu-y di titik $(0, 5)$
- $4x + 3y = 24$ memotong sumbu-x di titik $(6, 0)$
  $4x + 3y = 24$ memotong sumbu-y di titik $(0, 8)$

Grafik dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel beserta penyelesaiannya pada masalah tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 1.9
Grafik sistem pertidaksamaan linear dua variabel
$x + 2y \leq 10$
$4x + 3y \leq 24$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Berdasarkan gambar tersebut, Anda dapat mengetahui setiap titik sudut yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian, yaitu $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, B, dan $C(0, 5)$. Oleh karena titik B belum diketahui koordinatnya maka Anda terlebih dahulu harus menentukan koordinat titik B.

Titik B merupakan perpotongan garis $x + 2y = 10$ dan $4x + 3y = 24$. Selesaikan kedua persamaan tersebut untuk mendapatkan *absis* dan *ordinat* dari titik B, diperoleh

$$\begin{array}{l|l|r} x + 2y = 10 & \times 4 & 4x + 8y = 40 \\ 4x + 3y = 24 & \times 1 & 4x + 3y = 24 \\ \hline & & 5y = 16 \\ & & y = \dfrac{16}{5} \end{array} \; -$$

Substitusikan nilai $y = \dfrac{16}{5}$ ke persamaan $x + 2y = 10$, diperoleh

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x + 2\left(\frac{16}{5}\right) &= 10 \\ x + \frac{32}{5} &= 10 \\ x &= 10 - \frac{32}{5} \\ &= \frac{50 - 32}{5} \\ &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik B adalah $\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$.

Selanjutnya, substitusikan titik-titik sudut dari daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel ke dalam fungsi tujuan $z = f(x, y) = 3x + 4y$.

Titik sudut	$f(x, y) = 3x + 4y$
$O(0, 0)$	0
$A(6, 0)$	18
$B\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$	23,6
$C(0, 5)$	20

Jadi, nilai maksimum $f(x, y) = 3x + 4y$ adalah 23,6.

Contoh Soal 1.11

Cokelat A yang harganya Rp600,00 per bungkus dijual dengan laba Rp80,00 per bungkus. Cokelat B harganya Rp1.000,00 per bungkus dijual dengan laba Rp125,00 per bungkus. Modal yang dimiliki pedagang adalah Rp300.000,00 dan kotak tempat menjual cokelat mampu memuat 350 bungkus. Tentukan:

a. laba maksimum yang dapat diperoleh pedagang,

b. banyaknya cokelat A dan cokelat B yang harus dibeli pedagang agar dapat diperoleh laba yang maksimum.

Jawab:

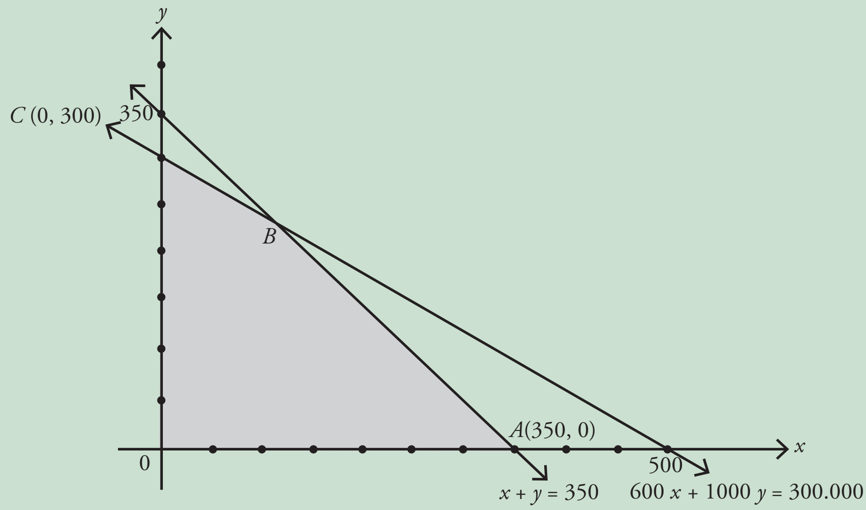
Misalkan banyaknya cokelat A ada x bungkus dan cokelat B ada y bungkus. Model matematika dari permasalahan tersebut adalah sebagai berikut.

Cobalah

Tempat parkir seluas 600 m² hanya mampu menampung 58 bus dan mobil, tiap mobil membutuhkan Rp500,00 dan bus Rp750,00 untuk membayar sewa parkir, jika tempat parkir itu penuh. Tentukanlah, hasil dari biaya parkir maksimum.

Sumber: Ebtanas 2000

Fungsi Tujuan:
$z = f(x, y) = 80x + 125y$
Kendala
$x + y \leq 350$
$600x + 1.000y \leq 300.000$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
Berdasarkan model tersebut, diperoleh daerah himpunan penyelesaian seperti pada gambar berikut.



daerah yang diarsir pada Gambar 1.10 memperlihatkan Himpunan penyelesaian
x+ y ≤ 350
600x + 1.000y ≤ 300.000
x ≥ 0
y ≥ 0

Titik B merupakan titik koordinat perpotongan antara kedua garis. Koordinat titik B diperoleh dengan cara menyelesaikan kedua persamaan garis seperti berikut.

$$\begin{array}{rl|l|}x + y &= 350 & \times 1000 \\ 600x + 1000y &= 300.000 & \times 1\end{array} \quad \begin{array}{rr}1.000\,x + 1.000\,y &= 350.000 \\ 600\,x + 1.000\,y &= 300.000 \\ \hline 400\,x &= 50.000 \\ x &= 125\end{array} -$$

Substitusi nilai $x = 125$ ke persamaan $x + y = 350$, diperoleh

$$\begin{aligned} x + y &= 350 \\ 125 + y &= 350 \\ y &= 350 - 125 \\ y &= 225 \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik B adalah (125, 225).
Titik sudut yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian tersebut adalah O (0, 0), A (350, 0), B(125, 225) dan C (0, 300).

Nilai fungsi tujuan dari keempat titik tersebut disajikan pada tabel berikut.

Titik Sudut	$Z = f(x, y) = 80x + 125y$
O(0, 0)	0
A(350, 0)	28.000
B(125, 225)	38.125
C(0, 300)	37.500

a. Berdasarkan tabel tersebut diketahui bahwa laba maksimum yang dapat diperoleh pedagang adalah Rp38.125,00.
b. Laba maksimum diperoleh jika banyaknya cokelat A sebanyak 125 bungkus dan cokelat B sebanyak 225 bungkus.

Contoh Soal 1.12

Seorang anak penderita kekurangan gizi diharuskan makan dua jenis tablet vitamin setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin *A* dan 3 unit vitamin *B*, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin *A* dan 1 unit vitamin *B*. Dalam satu hari, anak itu memerlukan 20 unit vitamin *A* dan 5 unit vitamin *B*. Jika harga tablet pertama Rp400,00/biji dan tablet kedua Rp600,00/biji, tentukan pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per harinya.

Jawab:

Permasalahan tersebut dapat disajikan dalam tabel berikut.

	Tablet 1	Tablet 2
Vitamin *A*	5	10
Vitamin *B*	3	1

Misalkan, banyaknya tablet 1 sebanyak x biji dan tablet 2 sebanyak y biji. Model matematika untuk masalah tersebut adalah sebagai berikut.

Fungsi tujuan:

$z = f(x, y) = 400x + 600y$

Kendala:

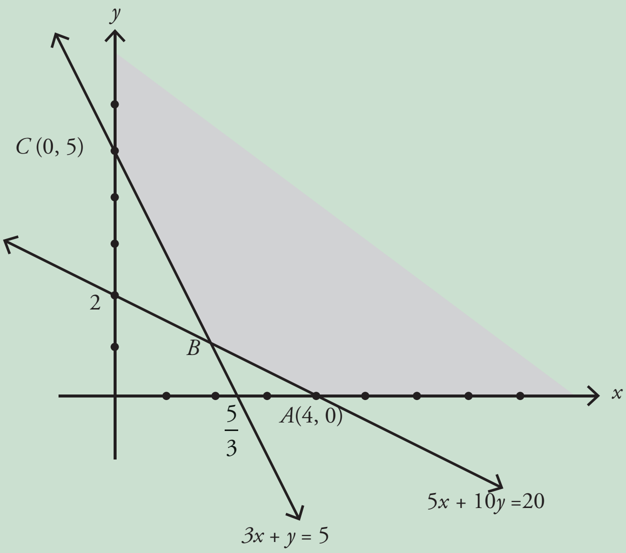
$5x + 10y \geq 20$

$3x + y \geq 5$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Berdasarkan model matematika tersebut, diperoleh daerah himpunan penyelesaiannya seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.11
Himpunan penyelesaian
$5x + 10y \geq 20$
$3x + y \geq 5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Titik *B* adalah koordinat titik potong garis $5x + 10y = 20$ dan $3x + y = 5$. Untuk mendapatkan titik *B*, cari penyelesaian dari kedua garis tersebut.

$$\begin{array}{rl|l} 5x + 10y = 20 & |\times 1| & 5x + 10y = 20 \\ 3x + y = 5 & |\times 10| & 30x + 10y = 50 \\ \hline & & -25x \qquad = -30 \quad - \\ & & x = \dfrac{6}{5} \end{array}$$

Cobalah

Rokok A yang harga belinya Rp1.000,00 dijual dengan harga Rp1.100,00 perbungkus. seorang pedagang rokok mempunyai modal Rp300.000,00, sedangkan kiosnya hanya dapat menampung paling banyak 250 bungkus rokok. pedagang tersebut dapat keuntungan maksimum jika ia membeli ....

Sumber: UMPTN, 2000

Substitusikan nilai $x = \frac{6}{5}$ ke persamaan $3x + y = 5$, diperoleh

$$3\left(\frac{6}{5}\right) + y = 5$$
$$y = 5 - \frac{18}{5}$$
$$= \frac{25-18}{5}$$
$$y = \frac{7}{5}$$

Titik-titik sudut yang terdapat pada daerah himpunan penyelesaian tersebut adalah A (4, 0), $B\left(\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)$, dan C (0, 5). Nilai fungsi tujuan dari ketiga titik tersebut disajikan dalam tabel berikut.

Titik Sudut	$Z = f(x, y) = 400x + 600y$
$A(4, 0)$	1.600
$B\left(\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)$	1.320
$C(0, 5)$	3.000

Jadi, nilai minimum untuk fungsi tujuan tersebut adalah 1.320. Artinya, pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per harinya Rp1.320,00.

Tugas 1.2

Coba Anda cari permasalahan di sekitar Anda yang berhubungan dengan program linear. Buatlah modelnya, kemudian selesaikan. Kemukakan hasilnya di depan kelas

Cobalah

Pedagang teh mempunyai lemari yang hanya cukup ditempati untuk 40 boks teh. Teh A dibeli dengan harga RP6.000,00 setiap boks dan teh B dibeli dengan harga Rp8.000,00 setiap boks. Jika pedagang tersebut mempunyai modal Rp300.000,00 untuk pembeli x boks teh A dan y boks teh B, tentukanlah sistem pertidaksamaan dari masalah tersebut.

Sumber: *Ebtanas*, 1999

Selain metode titik sudut, terdapat metode lain yang digunakan sebagai alternatif untuk menentukan nilai optimum dari suatu fungsi tujuan. Metode alternatif tersebut dikenal sebagai metode garis selidik.

Jika bentuk umum fungsi tujuan dinotasikan dengan $f(x, y) = z = ax + by$ maka bentuk umum garis selidik dinotasikan dengan

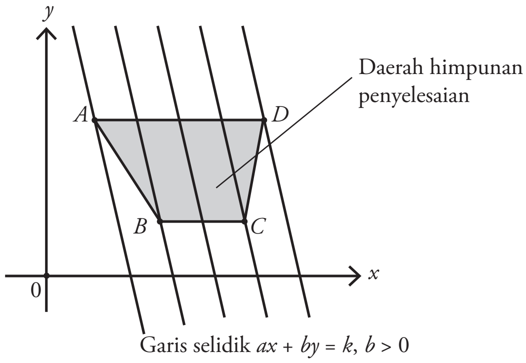
$ax + by = k$, dengan $k \in R$

Pada dasarnya, metode garis selidik dilakukan dengan cara menggeser garis selidik secara sejajar ke arah kiri, kanan, atas, atau bawah sampai garis tersebut memotong titik-titik sudut daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Untuk fungsi tujuan maksimum, titik optimum dicapai jika semua himpunan penyelesaian dari kendala-kendala sistem pertidaksamaan linear dua variabel berada di bawah atau sebelah kiri garis selidik. Adapun untuk fungsi tujuan minimum, titik optimum dicapai jika semua himpunan penyelesaian berada di atas atau sebelah kanan garis selidik dengan syarat koefisien y harus positif ($b > 0$). Jika koefisien y negatif ($b < 0$), maka berlaku sebaliknya.

Secara umum, langkah-langkah dalam menentukan nilai optimum dari masalah program linear dengan fungsi tujuan $z = f(x, y) = ax + by$, menggunakan metode garis selidik adalah sebagai berikut.

1. Gambarkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
2. Tentukan fungsi tujuan dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
3. Tentukan persamaan garis selidik
4. Untuk mendapatkan nilai maksimum, geser garis selidik secara sejajar ke arah kanan atau atas sampai memotong titik paling jauh dari daerah himpunan penyelesaian. Titik yang paling jauh tersebut merupakan titik yang memaksimumkan fungsi tujuan.
5. Untuk mendapatkan nilai minimum, geser garis selidik secara sejajar ke arah kiri atau bawah sampai memotong titik paling dekat dari daerah himpunan penyelesaian. Titik yang paling dekat tersebut merupakan titik yang meminimumkan fungsi tujuan.

Untuk mempermudah Anda dalam memahami metode garis selidik, perhatikan gambar berikut.



Berdasarkan gambar tersebut, titik A merupakan titik yang meminimumkan fungsi tujuan (objektif) dan titik D merupakan titik yang memaksimumkan tujuan.

Sebagai ilustrasi awal dari metode garis selidik, perhatikan kembali masalah program linear dari Contoh Soal 1.10 . Pada contoh soal tersebut, fungsi tujuan yang ingin dimaksimumkan adalah $z = f(x, y) = 3x + 4y$ dan fungsi kendalanya adalah

$x + 2y \leq 10$

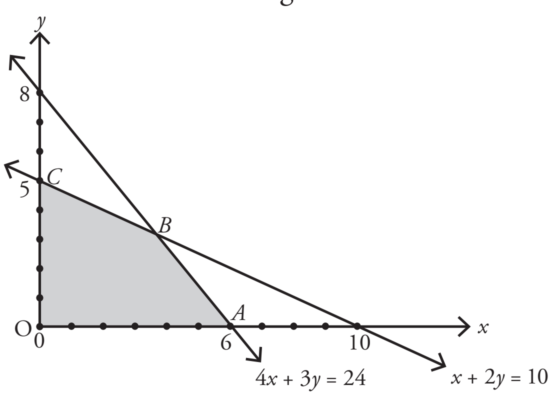
$4x + 3y \leq 24$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Nilai optimum dari masalah program linear tersebut dapat Anda cari dengan menggunakan metode garis selidik berikut.

- Daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan yang terdapat pada Contoh Soal 1.10 sebagai berikut.



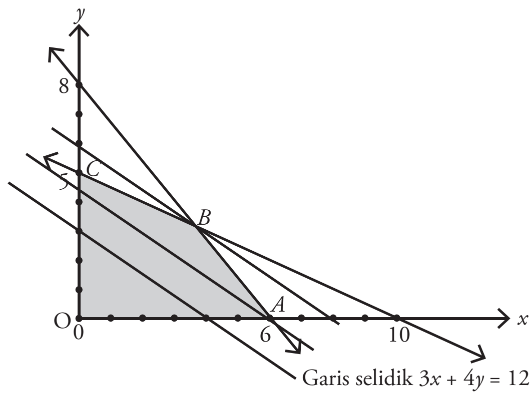
Cobalah

Di sebuah kantin, Sandi dan kawan-kawan membawa mangkok bakso dan 6 gelas es yang dipesannya, sedangkan Dani dan kawan-kawan membayar tidak lebih dari Rp50.000,00 untuk 8 mangkok dan 4 gelas es. Jika kita memesan 5 mangkok bakso dan 3 gelas es. Tentukanlah, maksimum yang harus kita bayar.

Sumber: *UM-UGM*, 2004

Gambar 1.12 : memperlihatkan Daerah himpunan penyelesaian
$x + 2y \leq 10$
$4x + 3y \leq 24$
$x \geq 0$
$y \geq 00$

- Fungsi tujuan dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel pada masalah tersebut adalah $3x + 4y$.
- Bentuk umum garis selidik: $ax + by = k \Rightarrow 3x + 4y = 12$.



Gambar 1.13 : memperlihatkan Garis selidik nilai maksimum $3x + 4y = 12$

Berdasarkan gambar 1.13, garis selidik yang digeser secara sejajar ke kanan atau ke atas, memotong titik terjauh dari himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang diketahui, yaitu titik *B*. Koordinat titik *B* setelah dicari adalah

$$B\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

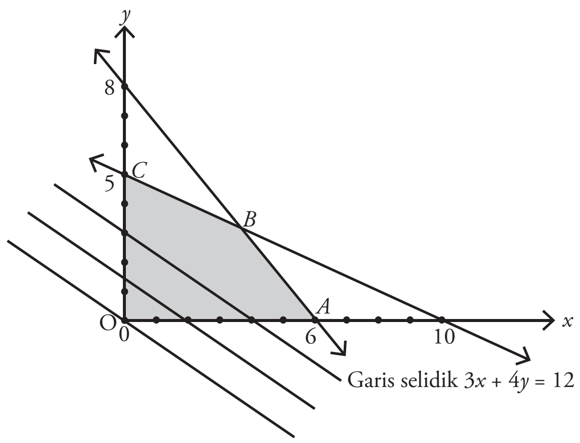
Dengan demikian, nilai optimum fungsi tujuan $z = f(x, y) = 3x + 4y$ dicapai pada titik

$B\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}\right)$

$z = f(x, y) = 3x + 4y$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}\right) &= 3\left(\frac{18}{5}\right) + 4\left(\frac{16}{5}\right) \\ &= \frac{54}{5} + \frac{64}{5} \\ &= \frac{118}{5} \\ &= 23{,}6 \end{aligned}$$

Berbeda halnya jika yang dicari adalah nilai minimum maka garis selidik harus digeser ke kiri atau ke bawah seperti gambar berikut.



Gambar 1.14
Garis selidik nilai minimum $3x + 4y = 12$

Berdasarkan gambar tersebut, titik $O(0, 0)$ merupakan titik paling dekat dari himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan. Dengan demikian, nilai minimum fungsi tujuan yang diberikan dicapai pada titik $O(0, 0)$, yaitu

$z = f(x, y) = 3x + 4y$

$f(0, 0) = 3(0) + 4(0) = 0$

Jadi, nilai maksimum sistem pertidaksamaan linear dua variabel tersebut adalah 23,6 yang dicapai pada titik $B\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}\right)$ dan nilai minimum 0 dicapai pada titik $O(0, 0)$

Contoh Soal 1.13

Gunakan metode garis selidik untuk mencari nilai optimum pada Contoh Soal 1.11 .

Jawab:

Fungsi tujuan dan kendala dari Contoh Soal 1.11 adalah

Fungsi tujuan: $z = f(x, y) = 80x + 125y$

Kendala:

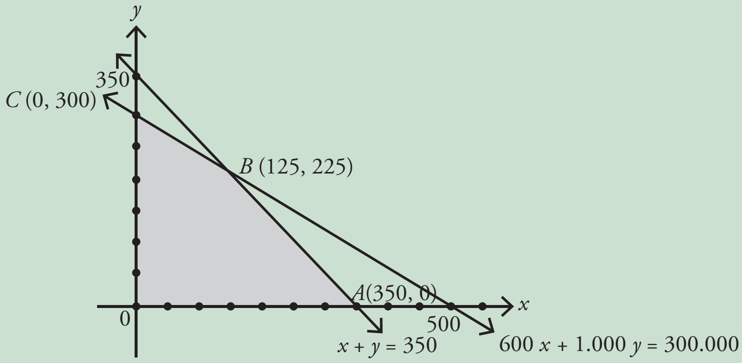
$x + y \leq 350$

$600x + 1.000y \leq 300.000$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan tersebut sebagai berikut.

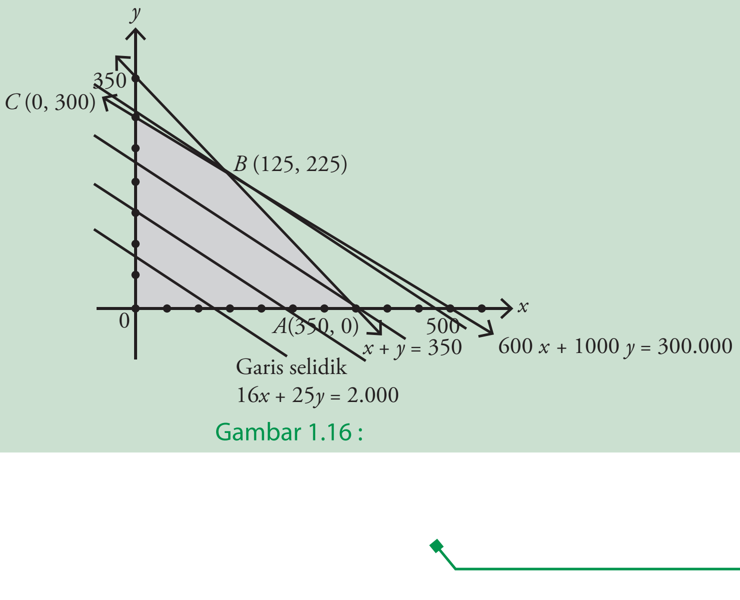


Gambar 1.15 :

Fungsi tujuan dari masalah program linear tersebut adalah $80x + 125y$.

Bentuk umum garis selidiknya $ax + by = k$ $80x + 125y = 10.000$ atau $16x + 25y = 2.000$

Oleh karena yang dicari adalah nilai maksimum maka geser garis selidik ke kanan atau atas seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.16 :

Gambar 1.15 : memperlihatkan Daerah himpunan penyelesaian
x +y ≤ 350
600x + 1.000y ≤ 300.000
x ≥ 0
y ≥ 0

Gambar 1.16 : memperlihatkan grafik nilai minimum
x +y ≤ 350
600x + 1.000y ≤ 300.000
x ≥ 0
y ≥ 0

Berdasarkan gambar 1.16, garis selidik yang digeser secara sejajar ke kanan atau ke atas, memotong titik terjauh dari himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel di titik B (125, 225).

Dengan demikian, nilai fungsi tujuan $z = 80x + 125y$ dicapai di titik B (125, 225)

$z = f(x, y) = 80x + 125y$

$$\begin{aligned} f(125, 225) &= 80(125) + 125(225) \\ &= 10.000 + 28.125 \\ &= 38.125 \end{aligned}$$

Jadi, nilai maksimum fungsi tujuan $z = 80x + 125y$ adalah 38.125

Tugas 1.3

Gunakan metode garis selidik untuk menyelesaikan masalah program linear pada Contoh Soal 1.12 . Kemukakan hasilnya di depan kelas

Tes Pemahaman 1.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

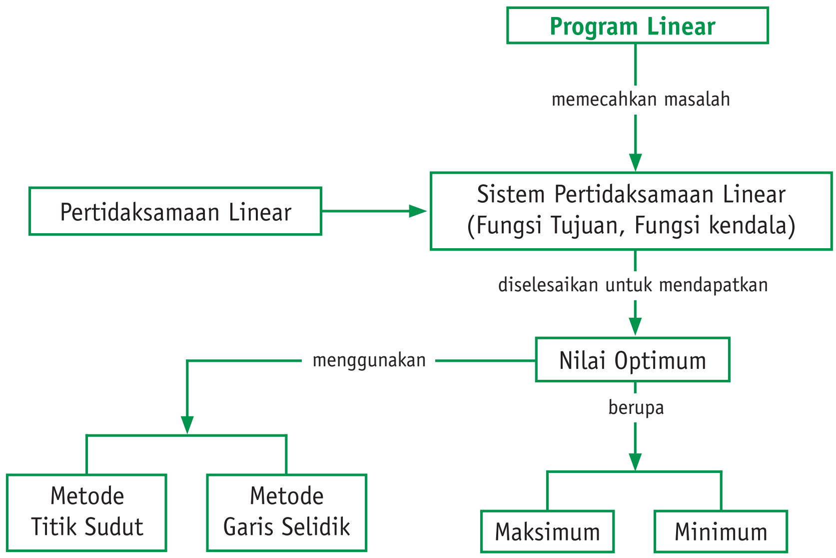
1. Apakah yang dimaksud dengan model matematika? Jelaskan dengan menggunakan kata-kata sendiri.
2. Apa yang Anda ketahui tentang program linear?
3. Harga 1 kg beras Rp6000,00 dan 1 kg gula Rp4500,00. Seorang pedagang memiliki modal Rp500.000,00 dan tempat yang tersedia hanya memuat 1 kuintal. Jika pedagang tersebut membeli x kg beras dan y kg gula, tentukan model dari masalah tersebut.
4. Tentukan nilai maksimum fungsi tujuan $z = 8x + 6y$ dengan kendala.
   $2x + y \leq 30$
   $x + 2y \leq 24$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
5. Seorang pedagang roti membuat dua jenis roti. Roti jenis A memerlukan 200 gram tepung dan 150 gram mentega. Roti jenis B memerlukan 400 gram tepung dan 50 gram mentega. Tepung yang tersedia 8 kg dan mentega yang tersedia 2,25 kg, serta harga jual roti jenis A Rp7500,00 per buah dan roti jenis B Rp6000,00 per buah, tentukan:
   a. Model dari permasalahan tersebut, lengkap dengan fungsi tujuannya.
   b. Daerah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan yang ada.
   c. Pendapatan maksimum yang dapat diperoleh oleh pedagang roti tersebut.

Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem pertidaksamaan yang terdiri atas dua pertidaksamaan atau lebih dan setiap pertidaksamaan tersebut mempunyai dua variabel.
2. Daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel, diperoleh dari irisan dari tiap-tiap pertidaksamaan linear dua variabel yang terdapat pada sistem tersebut.
3. Pada umumnya, model matematika dari setiap permasalahan program linear, terdiri atas 2 komponen, yaitu
   a. fungsi tujuan $z = f(x, y) = ax + by$,
   b. fungsi kendala (berupa pertidaksamaan linear).
4. Langkah-langkah dalam menentukan nilai optimum masalah program linear dengan fungsi tujuan $z = f(x, y) = ax + by$ menggunakan metode titik sudut adalah sebagai berikut.
   a. Buat model matematika dari masalah program linear yang diberikan.
   b. Gambarkan grafik-grafik dari setiap pertidaksamaan linear dua variabel yang diberikan.
   c. Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidakasamaan linear dua variabel yang terdapat pada masalah (irisan dari setiap pertidaksamaan linear dua variabel yang diketahui).
   d. Tentukan titik-titik sudut pada daerah himpunan penyelesaiannya.
   e. Substitusikan titik-titik sudut tersebut ke dalam fungsi tujuan. Ambil nilai yang paling besar untuk penyelesaian maksimum dan ambil yang paling kecil untuk penyelesaian minimum.

5. Langkah-langkah dalam menentukan nilai optimum masalah program linear dengan fungsi tujuan $z = f(x, y) = ax + by$ menggunakan metode garis selidik adalah sebagai berikut.
   a. Gambarkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
   b. Tentukan fungsi tujuan dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel.
   c. Tentukan persamaan garis selidik.
   d. Untuk mendapatkan nilai maksimum, geser garis selidik secara sejajar ke arah kanan atau atas sampai memotong titik paling jauh dari daerah himpunan penyelesaian, titik yang paling jauh tersebut merupakan titik yang memaksimumkan fungsi tujuan.
   e. Untuk mendapatkan nilai minimum, geser garis selidik secara sejajar ke arah kiri atau bawah sampai memotong titik paling dekat dari daerah himpunan penyelesaian. Titik yang paling dekat tersebut merupakan titik yang meminimumkan fungsi tujuan.

Peta Konsep

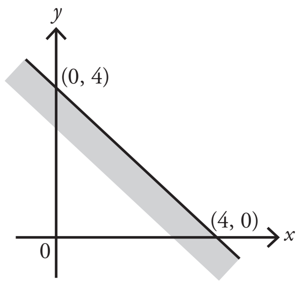


Tes Pemahaman Bab 1

Kerjakanlah di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar.

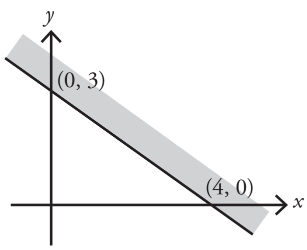
1.



Daerah yang diarsir pada gambar tersebut ditunjukkan oleh pertidaksamaan ....

a. $x + y \leq 0$
b. $x + y \leq 5$
c. $x + y \geq 5$
d. $x - y \leq 5$
e. $x - y \geq 0$

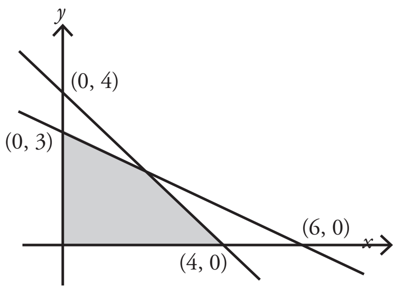
2.



Sistem pertidaksamaan yang menunjukkan himpunan penyelesaian dari daerah yang diarsir pada gambar tersebut adalah ....

a. $4x + 3y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$
b. $4x + 3y \geq 12, x \geq 0, y \geq 0$
c. $3x + 4y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$
d. $3x + 4y \geq 12, x \leq 0, y \leq 0$
e. $3x + 4y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$

3.



Sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah himpunan penyelesaian seperti yang ditunjukkan pada gambar tersebut adalah ....

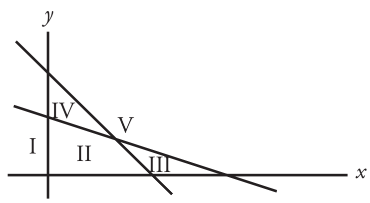
a. $x + y \leq 4, x + 2y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$
b. $x + y \geq 4, x + 2y \geq 6, x \geq 0, y \geq 0$
c. $x + y \leq 4, 2x + y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$
d. $x + y \geq 4, 2x + y \geq 6, x \leq 0, y \leq 0$
e. $x + y \leq 4, 2x + y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$

4. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 40$, $x + 2y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ terletak pada daerah yang berbentuk ....

a. trapesium
b. persegipanjang
c. segitiga
d. segiempat
e. segilima

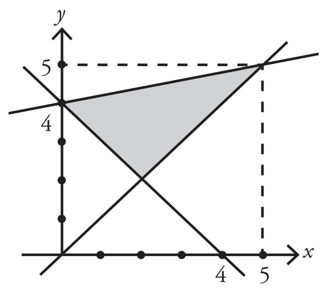
5. Daerah penyelesaian dari gambar di bawah ini yang memenuhi pertidaksamaan adalah ....

$2x + 3y \leq 6$
$3x + 2y \geq 6$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
adalah ....



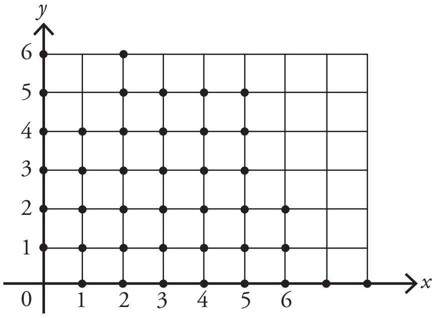
a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V

6. Nilai minimum $f(x, y) = 2x + 3y$ untuk x dan y yang terdapat pada daerah yang diarsir pada gambar berikut adalah ....



a. 25
b. 15
c. 12
d. 10
e. 5

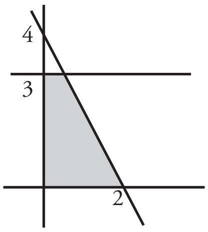
7. Titik-titik pada gambar berikut merupakan grafik himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan.



Nilai maksimum $(3x + 4y)$ pada himpunan penyelesaian itu adalah ....

a. 12
b. 21
c. 26
d. 30
e. 35

8. Daerah yang diarsir adalah himpunan penyelesaian dari ....



a. $2x + y \le 4$, $y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
b. $2x + y \le 4$, $x \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
c. $2x + y \ge 4$, $y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
d. $x + 2y \ge 4$, $x \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
e. $x + 2y \le 4$, $y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

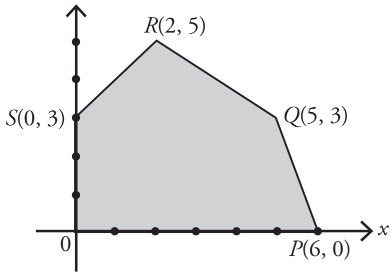
9. Nilai maksimum dari $f(x, y) = 20x + 30y$ dengan syarat $y + x \le 40$, $3y + x \le 90$, $x \ge 0$, dan $y \ge 0$ adalah ....

a. 950
b. 1000
c. 1050
d. 1100
e. 1150

10. Untuk (x, y) yang memenuhi $2x + 5y \le 10$, $4x + 3y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, nilai fungsi $z = y - 2x + 2$ terletak dalam selang ....

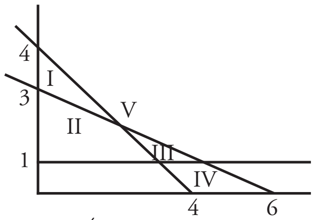
a. $\{z \mid 0 \le z \le 2\}$
b. $\{z \mid -2 \le z \le 0\}$
c. $\{z \mid -4 \le z \le 4\}$
d. $\{z \mid 2 \le z \le 11\}$
e. $\{z \mid 4 \le z \le 13\}$

11. Segilima *OPQRS* merupakan penyelesaian program linear, fungsi maksimum fungsi tujuan $x + 3y$ terletak di titik ....



a. O **d.** R
b. P **e.** S
c. Q

12. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan



$x + y \le 4$
$x + 2y \le 6$
$y \ge 1$
Ditunjukkan oleh ....

a. I   **d.** IV
b. II   **e.** V
c. III

13. Nilai minimum dari bentuk $4x + 3y$ pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan
$2x + 3y \ge 9$
$x + y \ge 4$
$x \ge y$
$y \ge 0$
adalah ....

a. 18   **d.** 13
b. 16   **e.** 12
c. 15

14. Harga per bungkus sabun *A* Rp2.000,00 dan sabun *B* Rp1.500,00. Jika pedagang hanya mempunyai modal Rp900.000,00 dan kiosnya hanya mampu menampung 500 bungkus sabun, model matematika dari permasalahan tersebut adalah ....

Sumber: *www.buzlu.com*

a. $x + y \ge 500$; $2x + 1{,}5y \ge 900$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
b. $x + y \le 500$; $2x + 1{,}5y \le 900$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
c. $x + y \ge 500$; $2x + 1{,}5y \le 900$; $x \ge 0$; $y \ge 0$
d. $x + y \ge 500$; $2x + 1{,}5y \ge 900$; $x \le 0$; $y \le 0$
e. $x + y \le 500$; $2x + 1{,}5y \ge 900$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

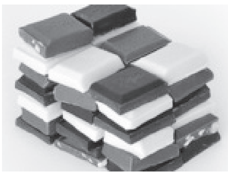
15. Sebuah pabrik roti memproduksi 120 kaleng roti setiap hari. Roti yang diproduksi terdiri atas dua jenis. Roti I diproduksi tidak kurang dari 30 kaleng dan roti II 50 kaleng.

Sumber: *www.pbase.com*

Jika roti I dibuat x kaleng dan roti II dibuat y kaleng, maka x dan y harus memenuhi syarat-syarat ....

a. $x \geq 30; y \geq 50; x + y \leq 120$
b. $x \leq 30; y \geq 50; x + y \leq 120$
c. $x \leq 30; y \leq 50; x + y \leq 120$
d. $x \leq 30; y \leq 50; x + y \geq 120$
e. $x \geq 30; y \geq 50; x + y \geq 120$

16. Suatu perusahaan cokelat membuat dua jenis cokelat. Jenis I membutuhkan 100 gram cokelat murni dan 50 gram gula, cokelat jenis II membutuhkan 50 gram cokelat murni dan 75 gram gula. Jika tersedia 2 kg cokelat murni dan 1,5 gula maka banyak cokelat yang terbanyak dapat dibuat adalah ....



Sumber: *www.blogsome.com*

a. 20 **d.** 35
b. 25 **e.** 40
c. 30

17. Seorang penjaja buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel Rp10000,00 tiap kg dan pisang Rp4000,00 tiap kg. Modalnya hanya Rp2.500.000 dan muatan gerobak tidak dapat melebihi 400 kg. Jika keuntungan tiap kg apel 2 kali keuntungan tiap kg pisang, maka untuk memperoleh keuntungan sebesar mungkin pada setiap pembelian, pedagang itu harus membeli ....

a. 250 kg apel saja
b. 400 kg pisang saja
c. 179 kg apel dan 200 kg pisang
d. 100 kg apel dan 300 kg pisang
e. 150 kg apel dan 250 kg pisang

18. Untuk dapat diterima di suatu lembaga pendidikan, seseorang harus lulus tes matematika dengan nilai tidak kurang dari 7 dan tes biologi dengan nilai tidak kurang dari 5, sedangkan jumlah nilai matematika dan biologi tidak kurang dari 13. Seorang calon dengan jumlah dua kali nilai matematika dan tiga kali nilai biologi sama dengan 30. Calon itu ....

a. pasti ditolak
b. pasti diterima
c. diterima asal nilai matematika lebih dari 9
d. diterima asal nilai biologi tidak kurang dari 25
e. diterima hanya bila nilai biologi 6

19. Diketahui $P = x + y$ dan $Q = 5x + y$, maka nilai maksimum dari P dan Q pada sistem pertidaksamaan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 12$ dan $2x + y \leq 12$ adalah ....

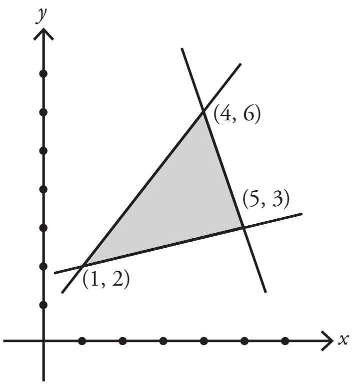
a. 8 dan 30 **d.** 6 dan 24
b. 6 dan 6 **e.** 8 dan 24
c. 4 dan 6

20. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa barang di bagasi 60 kg sedang kelas ekonomi 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1440 kg. Hanya tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjual tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, jumlah tempat duduk kelas utama haruslah ....

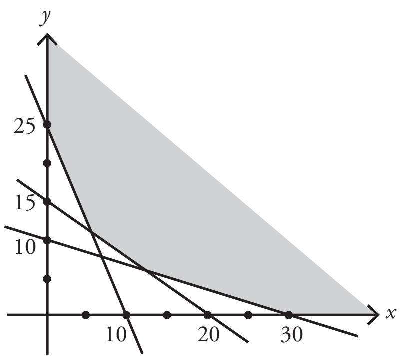
a. 12 **d.** 26
b. 20 **e.** 30
c. 24

II. Kerjakan soal-soal berikut.

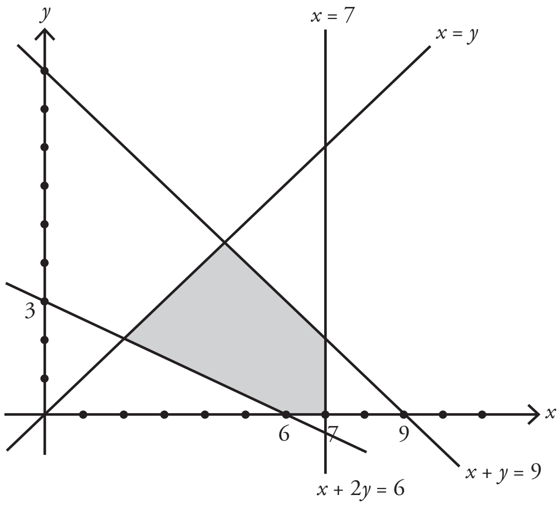
21. Daerah yang diarsir pada gambar berikut merupakan daerah himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear. Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang memenuhi penyelesaian tersebut.



22. Tentukan nilai minimum fungsi tujuan $3x + 5y$ yang himpunan penyelesaiannya disajikan pada daerah terarsir berikut.



23. Tentukan nilai maksimum dari fungsi tujuan $z = 10x + 5y$ pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan yang grafik himpunan penyelesaian disajikan pada daerah terarsir berikut.



24. Seorang pedagang minyak wangi keliling menjual 2 jenis minyak wangi, yaitu minyak wangi jenis *A* dan jenis *B*. Harga pembelian minyak wangi jenis *A* adalah Rp10.000,00 dan jenis *B* adalah Rp15.000. Tas yang dipakai hanya mampu memuat 100 botol minyak wangi. Jika keuntungan dari penjulan minyak wangi jenis *A* adalah Rp 3.000 dan jenis *B* adalah Rp5.000,00, tentukan banyaknya minyak wangi jenis *A* dan jenis *B* yang harus dijual agar keuntungan yang diperoleh pedagang tersebut maksimum.

25. Jumlah dari dua bilangan real tak negatif x dan $2y$ tidak lebih besar dari pada 10. Jika $y + 8$ tidak lebih kecil daripada 2x, tentukan nilai maksimum dari $3x + y$.

Refleksi Akhir Bab

Berilah tanda √ pada kolom yang sesuai dengan pemahaman Anda mengenai isi bab ini. Setelah mengisinya, Anda akan mengetahui pemahaman Anda mengenai isi bab yang telah dipelajari.

No	Pertanyaan	Jawaban			
		Tidak	Sebagian Kecil	Sebagian Besar	Seluruhnya
1.	Apakah Anda dapat mengerjakan soal-soal pada bab ini?				
2.	Apakah Anda memahami pengertian program linear				
3.	Apakah Anda memahami cara menggambarkan kendala dalam suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel di bidang *cartesius*?				
4.	Apakah Anda memahami permasalahan yang berhubungan dengan pengoptimasian fungsi objektif (fungsi tujuan) berdasarkan kondisi-kondisi yang membatasi?				
5.	Apakah Anda memahami pengertian model matematika dan dapat menyatakan masalah-masalah dalam soal?				
6.	Apakah Anda dapat mengerjakan sistem pertidaksamaan yang menunjukkan himpunan penyelesaian dari daerah yang sudah diarsir				
7.	Apakah Anda melakukan Kegiatan dan mengerjakan Tugas pada bab ini?				
8.	Apakah Anda memahami cara menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel?				
9.	Apakah Anda memahami pengertian pertidaksamaan linear dua variabel dan penyelesaian sistem pertidaksamaan?				
10.	Apakah Anda berdiskusi dengan teman-teman apabila ada materi-materi, yang belum Anda pahami?				

Bab 2

Sumber: www.badminton.com

Matriks

Pada Kelas X, Anda telah mempelajari cara menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan metode grafik, substitusi, eliminasi, dan gabungan substitusi-eliminasi. Pada bab ini, akan dijelaskan cara lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, yaitu dengan menggunakan matriks.

Penerapan matriks dalam kehidupan sehari-hari sangatlah luas, baik di bidang ekonomi, ilmu-ilmu sosial, maupun ilmu-ilmu alam. Dengan menggunakan matriks, penyelesaian sistem persamaan linear menjadi lebih mudah, khususnya untuk sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Salah satu contoh penggunaan matriks adalah untuk menyelesaikan permasalahan berikut. Misalnya pada pertandingan bulu tangkis tunggal putra antara Dani dan Firman, data atau informasinya sebagai berikut. Pada set I, Dani dan Firman bermain imbang, namun keberuntungan berpihak pada Dani dengan skor kemenangan angka tipis 17-16. Pada set II Firman memenangkan pertandingan dengan skor 15-13. Namun, di set III Firman dikalahkan secara telak dengan skor 15-7. Data-data tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks yang akan Anda pelajari pada bab ini.

Kuis

Cobalah kerjakan soal-soal berikut untuk mengetahui pemahaman Anda mengenai bab ini.

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$.
2. Jika x dan y memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} 3x + y = y \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$, tentukan nilai $x + y$.

A. Definisi dan Jenis-jenis Matriks

1. Definisi Matriks

Pada saat Anda membaca koran atau majalah, apakah informasi atau data yang Anda peroleh senantiasa selalu berupa teks bacaan yang terdiri atas sederetan kalimat yang membentuk paragraf? Jawabnya pasti tentu saja tidak, karena ada kalanya informasi yang disampaikan oleh koran atau majalah disajikan dalam bentuk sebuah tabel. Hal seperti ini sering Anda temui, tidak hanya sebatas pada koran atau majalah saja. Dalam kehidupan sehari-hari, masih banyak informasi atau data yang ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti data rekening listrik atau telepon, klasemen pertandingan olahraga, data perolehan nilai dan absensi siswa, serta harga jual sepeda motor. Sebagai gambaran awal mengenai materi matriks, pelajari uraian berikut ini.

Diketahui data hasil penjulan tiket penerbangan tujuan Medan dan Surabaya, dari sebuah agen tiket di Bandung selama empat hari berturut-turut disajikan dalam tabel berikut.

Hari ke / Tujuan	I	II	III	IV
Medan	3	4	2	5
Surabaya	7	1	3	2

Pada saat Anda membaca tabel tersebut maka hal pertama yang Anda perhatikan adalah kota tujuan, kemudian banyaknya tiket yang habis terjual untuk masing-masing kota setiap harinya.

Data pada tabel tersebut, dapat Anda sederhanakan dengan cara menghilangkan semua keterangan (judul baris dan kolom) pada tabel, dan mengganti tabel dengan kurung siku menjadi bentuk seperti berikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk tersebut, dapat Anda lihat bahwa data yang terbentuk terdiri atas bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Definisi

Definisi Matriks
Matriks adalah sekelompok bilangan yang disusun menurut baris dan kolom dalam tanda kurung dan berbentuk seperti sebuah persegipanjang.

Tanda kurung yang digunakan dalam sebuah matriks dapat berupa tanda kurung biasa "( )" atau tanda kurung siku "[ ]". Selanjutnya, tanda kurung yang akan digunakan dalam buku ini adalah tanda kurung siku.

Contoh Soal 2.1

Berikut beberapa contoh matriks.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 11 \\ 7 & 0 & 3 \\ -6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & 9 & -1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, seperti A, B, C, ... Bilangan-bilangan yang menyusun matriks disebut sebagai unsur, elemen atau anggota dari matriks tersebut. Elemen dari suatu matriks dinotasikan dengan huruf kecil seperti a, b, c, ... dan biasanya disesuaikan dengan nama matriksnya. Misalkan pada matriks A, elemen-elemennya biasanya dinyatakan dengan a. Biasanya elemen-elemen dari suatu matriks diberi tanda indeks, misalnya a_{ij} yang artinya elemen dari matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j.

Dari Contoh Soal 2.1 , Anda dapat melihat bahwa matriks A terdiri atas 2 baris dan 2 kolom, matriks P terdiri atas 3 baris dan 3 kolom, matriks T terdiri atas 2 baris dan 3 kolom, dan matriks W terdiri atas 4 baris dan 1 kolom. Banyaknya baris dan kolom yang dimiliki oleh matriks-matriks tersebut menyatakan ukuran atau ordo dari matriks-matriks tersebut. Pada Contoh Soal 2.1 , matriks A terdiri atas 2 baris dan 2 kolom. Dengan demikian, ordo matriks A adalah 2 kali 2 (ditulis 2×2 atau $A_{2 \times 2}$). Angka pertama menyatakan banyaknya baris, sedangkan angka kedua menyatakan banyaknya kolom pada matriks.

Dengan demikian, Anda dapat menuliskan bentuk umum suatu matriks. Misalkan matriks $A_{m \times n}$, dengan m dan n anggota bilangan asli maka matriksnya adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris 1} \\ \rightarrow \text{baris 2} \\ \\ \rightarrow \text{baris } m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Kolom 1} & \text{Kolom 2} & & \text{Kolom } n \end{array} \end{array}$$

Contoh Soal 2.2

Diketahui matriks

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 12 \\ -1 & 8 & -2 & 3 \\ 2 & 11 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. Banyaknya baris pada matriks H,
b. Banyaknya kolom pada matriks H,
c. Ordo matriks H,
d. Tentukan h_{32} dan h_{14},
e. Banyaknya elemen pada matriks H.

Jawab:

a. Matriks H terdiri atas 3 baris.

b. Matriks H terdiri atas 4 kolom.

c. Ordo matriks H adalah 3×4 karena matriks H terdiri atas 3 baris dan 4 kolom.

d. h_{32} artinya elemen matriks H yang terletak pada baris ke-3 dan kolom ke-2 sehingga $h_{32} = 11$, h_{14} artinya elemen matriks H yang terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-4 sehingga $h_{14} = 12$.

e. Matriks H memiliki 12 elemen

Contoh Soal 2.3

Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear berikut.

$2x - 3y = 4$

$3x - y = -1$

$-2x + 2y = 2$

Jawab:

Matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut adalah $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Contoh Soal 2.4

Departemen editorial di sebuah penerbit memiliki tenaga kerja yang terdiri atas editor, letter, desainer dan ilustrator seperti yang disajikan pada tabel berikut.

	Editor	Setter	Desainer	Ilustrator
L	56	80	7	16
P	40	32	3	9

a. Tuliskan data tersebut dalam bentuk matriks.

b. Tentukan ordo matriks yang terbentuk pada soal a.

c. Sebutkan elemen pada:
- baris ke-2,
- baris ke-1 kolom ke-3.

Jawab:

a. Bentuk matriks dari tabel tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 56 & 80 & 7 & 16 \\ 40 & 32 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

b. Ordo matriks tersebut adalah 2×4.

c.
- Elemen pada baris ke-2 adalah 40, 32, 3, dan 9.
- Elemen pada baris ke-1 kolom ke-3 adalah 7.

2. Jenis-jenis Matriks

Matriks dapat dibedakan menurut jenisnya, antara lain:

a) Matriks Nol

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks nol, jika semua elemennya sama dengan nol. Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matriks Baris

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks baris, jika matriks tersebut hanya terdiri atas satu baris, misalnya

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

c) Matriks Kolom

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks kolom, jika matriks tersebut hanya terdiri dari satu kolom. Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

d) Matriks Persegi atau Matriks Kuadrat

Suatu matriks dikatakan sebagai matriks persegi atau matriks kuadrat, jika jumlah baris pada matriks tersebut sama dengan jumlah kolomnya. Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 6 & -3 & 1 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Pada suatu matriks persegi ada yang dinamakan sebagai diagonal utama dan diagonal sekunder. Perhatikan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{diagonal sekunder} \\ \\ \longrightarrow \text{diagonal utama} \end{array}$$

Komponen-komponen yang terletak pada diagonal utama pada matriks tersebut adalah a_{11}, a_{22} dan a_{33} (sesuai dengan arsiran yang berasal dari kiri atas ke kanan bawah). Sebaliknya, komponen-komponen yang terletak pada diagonal sekunder sesuai dengan arsiran yang berasal dari kiri bawah ke kanan atas, dalam hal ini a_{11}, a_{22}, a_{33}.

e) Matriks Segitiga

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks segitiga jika elemen-elemen yang ada di bawah atau di atas diagonal utamanya (salah satu, tidak kedua-duanya) bernilai nol. Jika elemen-elemen yang ada di bawah diagonal utama bernilai nol maka disebut sebagai matriks segitiga atas. Sebaliknya, jika elemen-elemen yang ada di atas diagonal utamanya bernilai nol maka disebut sebagai matriks segitiga bawah. Misalnya,

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah

f) Matriks Diagonal

Suatu matriks persegi dikatakan sebagai matriks diagonal jika elemen-elemen yang ada di bawah dan di atas diagonal utamanya bernilai nol, atau dengan kata lain elemen-elemen selain diagonal utamanya bernilai nol. Misalnya,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

g) Matriks Skalar

Suatu matriks diagonal dikatakan sebagai matriks skalar jika semua elemen-elemen yang terletak pada diagonal utamanya memiliki nilai yang sama, misalnya

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

h) Matriks Identitas atau Matriks Satuan

Suatu matriks skalar dikatakan sebagai matriks identitas jika semua elemen yang terletak pada diagonal utamanya bernilai satu, sehingga matriks identitas disebut juga matriks satuan. Misalnya,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tugas 2.1

Diskusikan dengan teman sebangku Anda.

1. Apakah matriks persegi merupakan matriks diagonal? Berikan alasannya.
2. Apakah matriks diagonal merupakan matriks persegi? Berikan alasannya.
3. Jika $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, apakah matriks X merupakan matriks identitas? Berikan alasannya.

Tes Pemahaman 2.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Dengan menggunakan kata-kata sendiri, jelaskan apa yang dimaksud dengan:
   a. matriks,
   b. baris dan kolom pada sebuah matriks,
   c. elemen dari sebuah matriks.
2. Diketahui matriks-matriks berikut.

   $$S = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } T = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 0,1 \\ -0,3 & 0 & -0,2 \end{bmatrix}$$

   Tentukan:
   a. banyaknya baris dan kolom pada matriks S dan T,
   b. elemen-elemen pada baris ke-2 matriks T,
   c. ordo matriks S dan T,
   d. S_{21} dan T_{23}
3. Berikan 2 contoh matriks dengan elemen bilangan real, yang terdiri atas
   a. 5 baris dan 3 kolom
   b. 1 baris dan 4 kolom
4. Untuk setiap sistem persamaan berikut, tulislah matriks koefisien variabelnya.
   a. $x + 2y = 8$
      $3x + y = 14$
   b. $4x = -6$
      $2x - 3y = 9$
   c. $x + y - z = 4$
      $2x - 3y + 5z = 1$
      $2y + 3z = 5$

5. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

Manakah di antara matriks-matriks tersebut yang merupakan

a. matriks Persegi,
b. matriks Skalar,
c. matriks Baris,
d. matriks Diagonal.

B. Transpos dan Kesamaan Dua Matriks

Pada Subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari matriks mulai dari definisi sampai jenis-jenisnya. Pada subbab ini akan dibahas transpos dari suatu matriks dan kesamaan dari dua matriks.

1. Transpos Suatu Matriks

Dalam mendapatkan informasi yang berbentuk tabel, kadang-kadang Anda mendapatkan dua tabel yang berbeda namun memiliki makna yang sama. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Sebuah lembaga kursus bahasa asing memiliki program kursus Bahasa Inggris, Bahasa Arab, dan Bahasa Mandarin. Pada lembaga tersebut, jumlah kelas kursus pada setiap program di setiap harinya tidak selalu sama. Banyaknya kelas di setiap program kursus dapat disajikan dalam dua tabel berbeda dengan makna sama berikut.

Hari / Program	Senin	Selasa	Rabu	Kamis
B. Inggris	6	4	4	2
B. Arab	4	5	4	3
B. Mandarin	3	4	5	8

Program / Hari	B. Inggris	B. Arab	B. MAndarin
Senin	6	4	3
Selasa	4	5	4
Rabu	4	4	5
Kamis	2	3	8

Secara lebih sederhana, kedua tabel tersebut dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks berikut. Misalkan untuk tabel pertama dinamakan matriks *A* dan tabel kedua matriks *B*. Dengan demikian, bentuk matriks dari kedua tabel di atas adalah

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Sekarang, Anda perhatikan setiap elemen pada kedua matriks tersebut, kemudian bandingkan. Kesimpulan apa yang akan didapat?

Dengan membandingkan matriks A dan matriks B tersebut, Anda dapat mengetahui bahwa elemen-elemen pada baris pertama matriks A merupakan elemen-elemen pada kolom pertama matriks B. Demikian pula dengan elemen-elemen pada baris kedua dan ketiga matriks A merupakan elemen-elemen pada kolom kedua dan ketiga matriks B. Dengan demikian, matriks B diperoleh dengan cara menuliskan elemen setiap baris pada matriks A menjadi elemen setiap kolom matriks B. Matriks yang diperoleh dengan cara ini dinamakan sebagai matriks **transpos**.

Definisi

Misalkan A matriks sebarang. Transpos matriks A adalah matriks B yang disusun dengan cara menuliskan elemen setiap baris matriks A menjadi elemen setiap kolom pada matriks B. Transpos dari matriks A dilambangkan dengan $B = A^t$ (dibaca: A transpos).

Berdasarkan definisi transpos matriks, jika Anda memiliki matriks A yang berordo $m \times n$ maka transpos A, yaitu A^t memiliki ordo $n \times m$.

Contoh Soal 2.5

Tentukan transpos dari matriks-matriks berikut ini.

$$P = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$P^t = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q^t = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_2 & q_4 \end{bmatrix} \qquad R^t = \begin{bmatrix} a & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 2.6

Tentukan ordo dari matriks-matriks berikut.

a. $D_{2 \times 3}$ **b.** $W_{4 \times 1}$ **c.** $H_{1 \times 6}$

Jawab:

a. $D_{2 \times 3}$ artinya matriks D terdiri atas 2 baris dan 3 kolom. Dengan demikian, matriks transposnya terdiri atas 3 baris dan 2 kolom, yaitu $D^t_{3 \times 2}$.

b. $W_{4 \times 1}$ artinya matriks W terdiri atas 4 baris dan 1 kolom. Dengan demikian, matriks transposnya terdiri atas 1 baris dan 4 kolom, yaitu $W^t_{1 \times 4}$.

c. $H_{1 \times 6}$ artinya matriks H terdiri atas 1 baris dan 6 kolom. Dengan demikian, matriks transposnya terdiri atas 6 baris dan 1 kolom, yaitu $H^t_{6 \times 1}$.

2. Kesamaan Dua Matriks

Definisi

Definisi Kesamaan Dua Matriks
Dua buah matriks dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memiliki ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) pada kedua matriks tersebut sama.

Untuk lebih memahami definisi tersebut, perhatikanlah contoh berikut.

Pembahasan Soal

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$$

Jika A^t menyatakan matriks transpos dari A maka persamaan $A^t = B$ dipenuhi jika $x = \ldots.$

a. 2 **d.** -1
b. 1 **e.** -2
c. 0

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} x+y & x \\ y & x-y \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} x+y & y \\ x & x-y \end{bmatrix}$$

$A^t = B$

$$\begin{bmatrix} x+y & y \\ x & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh $x + y = 1$ dan $x = -2y$

Dengan demikian, $x + y = 1$

$(-2y) + y = 1$

$-y = 1$

$y = -1$

Untuk $y = -1$, maka $x = -2(-1) = 2$

Jawaban: **a**

Sumber: *Sipenmaru*, 1988

Contoh Soal 2.7

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. Apakah matriks $A = B$?

b. Apakah matriks $A = C$?

c. Apakah matriks $A = D$?

Jawab:

a. Matriks $A \neq$ matriks B karena ada satu elemen matriks A dan B yang seletak tidak memiliki nilai yang sama, yaitu $3 \neq -3$.

b. Matriks $A \neq$ matriks C karena ordo matriks A tidak sama dengan ordo matriks C, yaitu $A_{2 \times 2} \neq C_{2 \times 3}$.

c. Matriks A = matriks D karena matriks A dan matriks D memiliki ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) pada matriks A dan matriks D sama.

Setelah Anda memahami konsep kesamaan dua matriks maka Anda telah siap untuk menggunakan konsep ini dalam mencari nilai dari suatu elemen matriks yang tidak diketahui (berupa variabel). Untuk itu contoh berikut.

Contoh Soal 2.8

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x & 2y \end{bmatrix}$$

Jika $A = B^t$, tentukan nilai x dan y.

Jawab:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x & 2y \end{bmatrix} \to B^t = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 5 & 2y \end{bmatrix}$$

Oleh karena $A = B^t$ maka

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 5 & 2y \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan konsep kesamaan dua matriks maka diperoleh:

$x = -7$ dan $2y = 4 \to y = 2$

Jadi, nilai $x = -7$ dan $y = 2$

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 2x & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & x-2y \end{bmatrix}$$

Jika $P = R$, tentukan nilai $2(x + y)$.

Jawab:

$P = R$

$$\begin{bmatrix} 2x & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & x-2y \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan konsep kesamaan dua matriks, diperoleh :

$2x = 4$ dan $x - 2y = 6$

Dari $2x = 4$ diperoleh

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Pembahasan Soal

Jika $\begin{bmatrix} 4^{x+2y} & 0 \\ 2 & 3x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ maka $x + y$ =

a. $-\frac{15}{4}$

b. $-\frac{9}{4}$

c. $\frac{9}{4}$

d. $\frac{15}{4}$

e. $\frac{21}{4}$

Jawab:

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$4^{x+2y} = 8$ ... (1)

$3x - 2 =$ ... (2)

Dari (2) diperoleh

$3x - 2 = 7$

$3x = 9$

$x = 3$

Substitusikan nilai $x = 3$ ke (2), diperoleh

$4^{x+2y} = 8$

$2^{2(3+2y)} = 2^3$

$2(3 + 2y) = 3$

$6 + 4y = 3$

$4y = -3$

$y = -\frac{3}{4}$

Oleh karena $x = 3$ dan $y = -\frac{3}{4}$

maka $x + y = 3 + \left(-\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{12-3}{4}$

$= \frac{9}{4}$

Jadi, nilai $x + y = \frac{9}{4}$

Jawaban: **c**

Sumber: *UMPTN*, 2000

Substitusikan $x = 2$ ke $x - 2y = 6$, diperoleh :

$$\begin{aligned} 2 - 2y &= 6 \\ 2 - 6 &= 2y \\ 2y &= -4 \\ y &= -\frac{4}{2} = -2 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $x = 2$ dan $y = -2$

Dengan demikian, nilai $2(x + y) = 2(2+(-2)) = 2\ (0) = 0$

Tes Pemahaman 2.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Dengan menggunakan kata-kata sendiri, jelaskan apa yang dimaksud dengan matriks transpos.
2. Tentukan transpos dari matriks-matriks berikut.

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 8 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui matriks-matriks sebagai berikut.

$$R = \begin{bmatrix} 3a & a-2b \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \text{ dan } S = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

   a. Tentukan transpos dari matriks R.
   b. Jika $R^t = S$, tentukan nilai a dan b.

4. Buatlah sebuah matriks kolom berordo 1×5, kemudian cari transposnya. Termasuk matriks apakah matriks transposnya?
5. Tentukan nilai-nilai x, y, dan z dari kesamaan-kesamaan matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix} 3x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 2x-y & y \\ 2z & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -x & -1 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} x^2 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+x \\ y+3 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} -x & -2 & 2y-x^2 \\ -5 & 1 & z-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 1 & x \end{bmatrix}$

6. Transpos dari suatu matriks identitas adalah matriks identitas itu sendiri.
   Berikan penjelasan mengenai kebenaran dari pernyataan tersebut.

C. Operasi Aljabar pada Matriks

Pada subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari definisi, jenis, transpos, dan kesamaan dua matriks.

Pada subbab ini akan dipelajari operasi aljabar pada matriks. Dengan demikian, pada matriks pun berlaku sifat penjumlahan, pengurangan, ataupun perkalian seperti sama halnya pada bilangan.

1. Penjumlahan Matriks

Untuk memudahkan Anda dalam memahami penjumlahan pada matriks, pelajarilah uraian berikut. Di suatu kompleks perumahan terdapat dua kepala keluarga yang bermatapencaharian sebagai seorang *floris* (pedagang tanaman hias). Beberapa tanaman hias yang sering mereka jual di antaranya adalah *eforbia*, *calladium*, dan *adenium*. Berikut ini adalah persediaan tanaman-tanaman tersebut di kedua pedagang tersebut.

	Eforbia	*Calladium*	*Adenium*
Pedagang A	15	21	2
Pedagang B	12	7	25

Untuk menambah persediaan barang, kedua pedagang tersebut pada hari yang sama melakukan pembelian tanaman-tanaman baru yang jumlahnya disajikan pada tabel berikut.

	Eforbia	*Calladium*	*Adenium*
Pedagang *A*	20	14	30
Pedagang *B*	27	23	8

Berapa banyakkah pesediaan ketiga jenis tanaman yang ada di masing-masing pedagang setelah dilakukan pembelian tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan sangat mudah bagi Anda untuk mendapatkan jawabannya. Langkah yang dilakukan adalah menjumlahkan banyaknya tanaman pada persediaan awal dengan tanaman yang dibeli sebagai penambahan persediaan. Tentu saja yang dijumlahkan harus sejenis dan pada pedagang yang sama, misalnya banyak tanaman *eforbia* yang ada di pedagang *A* dijumlahkan dengan banyaknya tanaman *eforbia* yang dibeli oleh pedagang *A* (yang dijumlahkan harus bersesuaian).

Kedua tabel tersebut dapat disederhanakan dan diubah ke dalam bentuk matriks. Selanjutnya melakukan pejumlahan matriks, yaitu yang dijumlahkan adalah elemen-elemen yang seletak. Berikut definisi dari penjumlahan matriks.


Sumber: www.agaclar.net
Gambar 2.1 : Tanaman Eforbia


Sumber: www.ericandleandra.com
Gambar 2.2 : Tanaman Calladium


Sumber: www.indonetwork.co.id
Gambar 2.3 : Tanaman Adenium

Definisi

Definisi Penjumlahan Matriks

Jika *A* dan *B* adalah dua matriks yang berordo sama maka jumlah dari matriks *A* dan *B* (ditulis *A* + *B*) adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap elemen matriks *A* dengan elemen-elemen matriks *B* yang seletak (bersesuaian).

Kedua tabel pada uraian tersebut jika diubah ke dalam bentuk matriks dan dijumlahkan adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 15 & 21 & 2 \\ 12 & 7 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 14 & 30 \\ 27 & 23 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+20 & 21+14 & 2+30 \\ 12+27 & 7+23 & 25+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35 & 35 & 33 \\ 39 & 30 & 33 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan informasi dari penjumlahan matriks tersebut, diperoleh informasi persediaan tanaman di kedua pedagang tadi adalah seperti disajikan pada tabel berikut.

	Eforbia	*Calladium*	*Adenium*
Pedagang *A*	35	35	33
Pedagang *B*	39	30	33

2. Pengurangan Matriks

Sama halnya seperti pada operasi penjumlahan matriks, pada operasi pengurangan matriks berlaku pula ketentuan kesamaan ordo antara matriks yang bertindak sebagai matriks pengurang dan matriks yang akan dikurangi.

Definisi

Definisi Pengurangan Matriks
Jika A dan B adalah 2 matriks yang berordo sama maka pengurangan matriks A oleh B, ditulis $(A - B)$, adalah matriks baru yang diperoleh dengan cara mengurangkan elemen-elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak.

Contoh Soal 2.9

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

a. $D + W$ c. $H - S$
b. $W - H$ d. $W + S$

Jawab:

a. $D + W = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & -5+6 \\ 1+8 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

b. $W - H = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 6-(-1) \\ 8-3 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

c. $H - S$
Matriks H tidak dapat dikurangi matriks S karena memiliki ordo yang dimiliki masing-masing matriks berbeda.

d. $W + S$
Matriks W tidak dapat dijumlahkan dengan matriks S karena ordo yang dimiliki masing-masing matriks berbeda.

Kegiatan 2.1

Lakukanlah kegiatan berikut bersama teman sebangku Anda.

1. Misalkan A, B, dan C adalah matriks-matriks berordo 2×2 dengan
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
2. Hitunglah $A + B$ dan $B + A$.
Apakah $A + B = B + A$?
3. Hitunglah $A + (B + C)$ dan $(A + B) + C$.
Apakah $A + (B + C) = (A + B) + C$?
4. Hitunglah $A - B$ dan $B - A$.
Apakah $A - B = B - A$?
Analisis: dari hasil yang Anda peroleh pada langkah 2, 3 dan 4, tentukanlah kesimpulan yang dapat Anda ambil mengenai sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan matriks.

Dari **Kegiatan 2.1**, diperoleh sifat-sifat penjumlahan dan pengurangan matriks sebagai berikut.

Sifat-sifat Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
Misalkan A, B, dan C matriks-matriks dengan ordo sama maka berlaku sifat-sifat berikut:

1. $A + B = B + A$ (*Komutatif*)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*Asosiatif*)
3. $A - B \neq B - A$ (*Anti Komutatif*)

Tugas 2.1

Buatlah kelompok yang terdiri atas 4 orang. Kemudian, buatlah dua contoh soal seperti pada **Kegiatan 2.1** untuk matriks yang berordo selain 2×2 dan selesaikanlah soal-soal tersebut.

3. Perkalian Bilangan Real dengan Sebuah Matriks

Dalam aljabar, perkalian terhadap suatu bilangan merupakan penjumlahan berulang dari bilangan tersebut. Misalnya, perkalian berikut.

$2a = a + a$

$ka = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{sebanyak } k \text{ buah}}$

Dalam matriks pun berlaku ketentuan seperti itu. Untuk lebih jelasnya, pelajari uraian berikut.

Misalkan $H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan $2H$ dan $-2H$.

- $$2H = H + H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+(-1) \\ 0+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times(-1) \\ 2\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix}$$

  Jadi, matriks $2H$ adalah matriks yang diperoleh dari hasil penjumlahan matriks H dengan matriks H, atau dengan kata lain hasil dari perkalian 2 dengan setiap elemen pada matriks H.

- $$-2H = -H + (-H) = -H - H$$
  $$= -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
  $$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
  $$= \begin{bmatrix} -2+(-2) & 1+1 \\ 0+0 & -1+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\times 2 & -2\times(-1) \\ -2\times 0 & -2\times 1 \end{bmatrix}$$

  Jadi, matriks $-2H$ adalah matriks yang diperoleh dari hasil penjumlahan matriks $-H$ dengan matriks $-H$, atau dengan kata lain hasil dari perkalian -2 dengan setiap elemen pada matriks H.

Berdasarkan uraian tersebut, Anda dapat memperoleh definisi berikut.

Definisi

Definisi Perkalian Bilangan Real dan Matriks

Jika A sebarang matriks, dan k sebarang bilangan real maka kA adalah sebuah matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen matriks A. Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar.

Catatan

Perkalian sebuah skalar dengan sebuah matriks, tidak menambah ordo dari matriks tersebut.

Contoh Soal 2.10

Diketahui matriks-matriks berikut.

$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $3A$ dan $5A$ **c.** $2(3B)$

b. $2(A + B)$ **d.** $-1(A)$

Jawab:

a. $3A = 3\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4 & 3\times(-5) \\ 3\times 10 & 3\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 30 & 6 \end{bmatrix}$

$5A = 5\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times 4 & 5\times(-5) \\ 5\times 10 & 5\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -25 \\ 50 & 10 \end{bmatrix}$

b. $$2(A + B) = 2\left(\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 21 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 6 & 2\times(-5) \\ 2\times 21 & 2\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -10 \\ 42 & 10 \end{bmatrix}$$

c. $$2(3B) = 2\left(3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 0 \\ 3\times 11 & 3\times 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 33 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 6 & 2\times 0 \\ 2\times 33 & 2\times 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 66 & 18 \end{bmatrix}$$

d. $$(-1)A = -1\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times 4 & -1\times(-5) \\ -1\times 10 & -1\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$$

Kegiatan 2.2

Lakukan kegiatan berikut bersama teman sebangku Anda.

Misalkan, $D = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan skalar-skalar a dan b dengan $a = 2$ dan $b = -1$

1. Hitunglah $aD + aH$ dan $a(D + H)$.
   Apakah $aD + aH = a(D + H)$?
2. Hitunglah $aD + bD$ dan $(a + b)D$.
   Apakah $aD + bD = (a + b)D$?
3. Hitunglah $a(bD)$ dan $(ab)D$
   Apakah $a(bD) = (ab)D$?

Analisis: Dari hasil yang Anda peroleh pada langkah 2, 3, dan 4, tentukan kesimpulan yang dapat Anda ambil mengenai sifat-sifat perkalian skalar.

Dari **Kegiatan 2.2**, apakah kesimpulan yang Anda peroleh tentang sifat-sifat perkalian skalar sama seperti yang tertera berikut?

Sifat-Sifat Perkalian Skalar

Misalkan a dan b skalar, D dan H matriks sebarang dengan ordo sama, maka berlaku sifat-sifat sebagai berikut

1. $aD + aH = a(D + H)$
2. $aD + bD = (a + b)D$
3. $a(bD) = (ab)D$

4. Perkalian Matriks

Dua buah matriks atau lebih selain dapat dijumlahkan atau dikurangkan, juga dapat dikalikan. Untuk memudahkan Anda dalam memahami perkalian matriks, pelajari uraian berikut dengan baik.

Riki dan Fera membeli alat tulis di koperasi sekolah. Riki membeli 3 buah bolpoin dan 2 buku, sedangkan Fera membeli 2 buah bolpoin dan 5 buku. Jika harga sebuah bolpoin Rp1.000,00 dan harga sebuah buku Rp2.500,00, berapakah harga belanjaan yang harus dibayar oleh masing-masing siswa tersebut?

Permasalahan tersebut dapat disajikan dalam bentuk tabel berikut.

	Bolpoin	Buku
Riki	3	2
Fera	2	5

	Harga
Bolpoin	1.000
Buku	2.500

Penyelesaian dari permasalahan tersebut bisa diselesaikan dengan menggunakan aljabar biasa atau menggunakan matriks. Dalam hal ini, permasalahan tersebut akan diselesaikan menggunakan matriks, sebagai pengantar untuk memahami perkalian matriks yang akan Anda pelajari.

Langkah pertama adalah menuliskan model dari masalah tersebut menjadi bentuk matriks, sehingga diperoleh:

- Data banyaknya bolpoin dan buku yang dibeli oleh Riki dan Fera (dinyatakan oleh matriks P), yaitu

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Data harga bolpoin dan buku (dinyatakan oleh matriks Q), yaitu

$$Q = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.500 \end{bmatrix}$$

Elemen baris pertama dan kolom pertama matriks P menyatakan banyaknya bolpoin yang dibeli Riki, sedangkan elemen baris pertama dan kolom pertama matriks Q menyatakan harga bolpoin. Dengan demikian, untuk mengetahui harga beli semua bolpoin yang dibeli Riki adalah dengan cara mengalikan elemen baris pertama kolom pertama matriks P dengan elemen baris pertama kolom pertama matriks Q. Dalam hal ini, (3)(1.000). Begitu pula untuk harga beli buku yang dibeli Riki, yaitu dengan cara mengalikan elemen baris pertama kolom kedua matriks P dengan elemen baris kedua kolom pertama matriks Q, dalam hal ini (2)(2.500). Harga belanjaan yang dibayar Riki adalah penjumlahan dari hasil kali tadi, yaitu (3)(1.000) + (2)(2.500) = 3.000 + 5.000 = 8.000. Jadi, harga belanjaan Riki Rp8.000,00. Tentukan harga belanjaan yang harus dibayar oleh Fera?

Dari uraian tersebut, dapat Anda ketahui bahwa untuk mendapatkan besarnya harga belanjaan kedua siswa tersebut adalah dengan cara mengalikan matriks P dan Q, sebagai berikut

$$PQ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1.000) + (2 \times 2.500) \\ (2 \times 2.000) + (5 \times 2.500) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.000 \\ 16.500 \end{bmatrix}$$

Perkalian tersebut dinamakan perkalian matriks. Ketentuan yang harus Anda ingat, yaitu perkalian dua matriks bisa dilakukan apabila banyaknya kolom pengali (matriks pertama yaitu P) sama dengan banyaknya baris matriks yang dikalikan (matriks kedua yaitu Q).

Dari uraian diketahui bahwa ordo $P_{2 \times 2}$ dan $Q_{2 \times 1}$ dan hasil kalinya berordo 2×1.

$$P \quad \times \quad Q \quad = R$$

$$(\overbrace{2 \times \underbrace{2)\ (2}_{\text{sama}} \times 1}^{\text{ordo hasil}}) = (2 \times 1)$$

Catatan

Jika matriks A dapat dikalikan dengan matriks B, belum tentu matriks B dapat dikalikan dengan matriks A

Secara umum, jika matriks P berordo $m \times p$ dan matriks Q berordo $p \times n$ maka matriks hasil kali PQ berordo $m \times n$.

Definisi

Definisi Perkalian Matriks

Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan (ditulis AB) jika banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. Elemen-elemen pada matriks AB diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B.

Contoh Soal 2.11

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. PQ **b.** QR **c.** RP

Jawab:

a.
$$PQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1 \times (-3)) + (0 \times 5) & (-1 \times 2) + (0 \times 7) \\ (2 \times (-3)) + (1 \times 5) & (2 \times 2) + (1 \times 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

b.
$$QR = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-3 \times 2) + (2 \times 4) & (-3 \times 5) + (2 \times (-3)) & (-3 \times (-1) + 2(0) \\ (5 \times 2) + (7 \times 4) & (5 \times 5) + (7 \times (-3)) & (5 \times (-1)) + 7(0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -21 & 3 \\ 38 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

c. RP = Hasil kali matriks R dan matriks P tidak dapat dicari karena matriks R tidak dapat dikalikan dengan matriks P (banyak kolom matriks R tidak sama dengan banyak baris matriks P).

Contoh Soal 2.12

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. AB c. $A(BC)$

b. BA d. $(AB)C$

Jawab:

a. $$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times(-3))+(-5\times 1) & (2\times 2)+(-5\times 1) \\ (1\times(-3))+(0\times 1) & (1\times 2)+(0\times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

b. $$BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3\times 2)+(2\times 1) & (-3\times(-5))+(2\times 0) \\ (1\times 2)+(1\times 1) & (1\times(-5))+(1\times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 15 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

c. $A(BC)$

$$BC = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3\times 4)+(2\times 7) & (-3\times(-1))+(2\times 2) \\ (1\times 4)+(1\times 7) & (1\times(-1))+(1\times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times 2)+(-5\times 11) & (2\times 7)+(-5\times 1) \\ (1\times 2)+(0\times 11) & (1\times 7)+(0\times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51 & 9 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

d. $$(AB)C = \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-11\times 4)+(-1\times 7) & (-11\times(-1)+(-1\times 2) \\ (-3\times 4)+(2\times 7) & (-3\times(-1))+(2\times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -51 & 9 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari **Contoh Soal 2.12**, diketahui beberapa sifat dari perkalian matriks selain sifat-sifat lainnya.

Sifat-Sifat Perkalian Matriks

1. $AB \neq BA$ *Tidak komutatif*
2. $A(BC) = (AB)C$ *Asosiatif*
3. $A(B + C) = AB + AC$ *Distributif*
4. $(A + B)C = AC + BC$ *Distributif*
5. $k(AB) = kA(B) = A(kB)$ *Asosiatif*
6. $IA = AI = A$ *Perkalian dengan Identitas*
7. $(AB)^t = B^tA^t$
8. $(BA)^t = A^tB^t$

Pembahasan Soal

Diketahui matriks A dan matriks B berordo 2 × 2.

Harga $(A + B)^2$ adalah ....

a. $A^2 + 2A \cdot B + B^2$

b. $A^2 + A \cdot B + A \cdot B + B^2$

c. $A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B$

d. $A(A + B) + B(A + B)$

e. $A^2 + 2B \cdot A + B^2$

Jawab:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A(A + B) + B(A + B) \\ &= A \cdot A + B \cdot B + B \cdot A + B \cdot B \\ &= A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2\end{aligned}$$

Oleh karena pada perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif $AB \neq BA$ maka harga $(A + B)^2 = A(A + B) + B(A + B)$

Jawaban: **d**

Sumber: *Sipenmaru*, 1984

5. Perpangkatan Matriks Persegi

Di Kelas X Anda telah mengenal perpangkatan suatu bilangan ataupun perpangkatan suatu variabel. Perpangkatan adalah perkalian berulang dari bilangan atau variabel tersebut sebanyak bilangan pangkatnya.

Misalkan,

$2^2 = 2 \times 2$ atau $a^2 = a \times a$

$2^3 = 2 \times 2^2$ $a^3 = a \times a^2$

dan seterusnya. dan seterusnya.

Pada matriks pun berlaku aturan seperti itu.

> Misalkan A adalah matriks persegi dengan ordo $n \times n$ maka bentuk pangkat dari matriks A didefinisikan sebagai berikut.
>
> $A^2 = A \times A$
>
> $A^3 = A \times A^2 = A \times A \times A$
>
> $\vdots$
>
> $A^n = A \times A^{n-1} = \underbrace{A \times A \times A \ldots \times A}_{\text{Sebanyak } n \text{ buah}}$

Cobalah

Jika diketahui

$A = \begin{pmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$

$= 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

tentukanlah nilai x.

Sumber: *UMPTN*, 1998

Contoh Soal 2.13

Diketahui matriks

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

a. Tentukan A^2 dan A^3

b. Tentukan $2A^3 - 3A^2$

Jawab:

a. $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b. $2A^3 - 3A^2 = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

Pembahasan Soal

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan I matriks satuan ordo dua maka $A^2 - 2A + 1 = \ldots.$

a. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Jawab:

$A^2 = A \cdot A$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

I matriks satuan ordo dua.

Berarti $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 - 2A + I$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Jawaban: **d**

Sumber: *UMPTN*, 1993

Contoh Soal 2.14

Diketahui matriks-matris

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -z & w \end{bmatrix}$

Tentukan nilai-nilai w, x, y dan z yang memenuhi persamaan $2B^2 = 3D$.

Jawab:

$2B^2 = 3D$

$2\,B \times B = 3D$

$$2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2x & y \\ -z & w \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 3y \\ -3z & 3w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 40 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 3y \\ -3z & 3w \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan elemen-elemen matriks yang seletak, diperoleh

$6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$3y = -10 \Leftrightarrow y = -\frac{10}{3}$

$-3z = 40 \Leftrightarrow z = -\frac{40}{3}$

$3w = 10 \Leftrightarrow w = \frac{10}{3}$

Nilai w, x, y dan z yang memenuhi persamaan $2B^2 = 3D$ adalah

$w = \frac{10}{3}$, $x = 0$, $y = -\frac{10}{3}$ dan $z = -\frac{40}{3}$.

Tes Pemahaman 2.3

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Carilah hasil operasi matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 2 & -7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

   c. $2\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. Carilah matriks X, yang memenuhi

   $4\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2X = 7\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. Carilah nilai w, x, y, dan z pada persamaan berikut.

   $3\begin{bmatrix} x & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & w \\ y & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 1 & z \end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks-matriks

   $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

   Tentukan nilai :

   a. $A \cdot B$

   b. $(B + C)A$

   c. $(3A)(2B)$

   d. B^tA^t

   e. $A(BC)$

5. Diketahui matriks-matriks

   $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Tentukan nilai:

   a. $2P + Q^2 - 3R$

   b. $(P - Q)(P + Q)$

   c. $P^2 - Q^2$

   d. $(P - Q)(P + Q) = P^2 + Q^2$

D. Determinan dan Invers Matriks

Pengalaman mempelajari subbab sebelumnya akan dipergunakan dalam mempelajari determinan dan invers matriks pada subbab ini.

1. Determinan Matriks Persegi

Pada bagian sebelumnya, Anda telah mengenal matriks persegi, yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Pembahasan materi determinan matriks persegi yang dibahas di buku ini dibatasi hanya sampai matriks 3 × 3.

a. Determinan Matriks 2 × 2

Matriks berordo 2 × 2 yang terdiri atas dua baris dan dua kolom. Pada bagian ini akan dibahas determinan dari suatu matriks berordo 2 × 2. Misalkan A adalah matriks persegi ordo 2 × 2 dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Cobalah

Jika $A = \begin{bmatrix} 2x+1 & x-1 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ maka jumlah semua nilai x, sehingga $A = 27$ adalah ....

Sumber: SPMB, 1976

Definisi

Determinan matriks A di definisikan sebagai selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau $|A|$. Nilai dari determinan suatu matriks berupa bilangan real.

Berdasarkan definisi determinan suatu matriks, Anda bisa mencari nilai determinan dari matriks A, yaitu:

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \times d - b \times c = ad - bc$$

diagonal sekunder

diagonal utama

Contoh Soal 2.15

Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3a & -2 \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -2z & 3z \\ -10y & -y \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det P = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2 \times 0) - (1 \times 3) = 0 - 3 = -3$$

$$\det Q = \begin{vmatrix} 3a & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (3a \times 1) - (a \times (-2)) = 3a + 2a = 5a$$

$$\det R = \begin{vmatrix} -2z & 3z \\ -10y & -y \end{vmatrix} = (-2z \times (-y)) - (-10y \times 3z) = 2yz + 30yz = 32yz$$

Contoh Soal 2.16

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2a-10 & 4 \\ -3 & a \end{bmatrix}$.

Hitunglah nilai-nilai a yang memenuhi det A = 0.

Jawab:

det A = 0

$$\det A = \begin{vmatrix} 2a-10 & 4 \\ -3 & a \end{vmatrix} = ((2a - 10) \times a) - (-3 \times 4) = 2a^2 - 10a + 12$$

Oleh karena det A = 0 maka

$2a^2 - 10a + 12 = 0$

$a^2 - 5a + 6 = 0$ *kedua ruas dikali* $\frac{1}{2}$

$(a - 2)(a - 3) = 0$

$a - 2 = 0$ atau $a - 3 = 0$

$a = 2$ atau $a = 3$

Jadi, nilai a yang memenuhi det A = 0 adalah 2 dan 3.

b. Determinan Matriks 3 × 3

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari determinan mariks berordo 3 × 3. Misalkan A matriks persegi berordo 3 × 3 dengan bentuk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari determinan dari matriks persegi berordo 3 × 3, akan digunakan suatu metode yang dinamakan *metode Sarrus*. Adapun langkah-langkah yang harus Anda lakukan untuk mencari determinan matriks berordo 3 × 3 dengan *metode Sarrus* adalah sebagai berikut:

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua matriks A di sebelah kanan tanda determinan.
2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama (lihat gambar). Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan D_u

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$D_u = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder (lihar gambar). Nyatakan jumlah hasil harga tersebut dengan D_s.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$D_s = a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{32}\, a_{23}\, a_{31} + a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$$

4. Sesuai dengan definisi determinan matriks maka determinan dari matriks A adalah selisih antara D_u dan D_s yaitu $D_u - D_s$.

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$= (a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}) - (a_{31}\, a_{22}\, a_{13} + a_{32}\, a_{23}\, a_{31} + a_{33}\, a_{21}\, a_{12})$$

Contoh Soal 2.17

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan nilai determinan matriks A.

Jawab:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$= [(-3 \times 1 \times (-1)) + (4 \times 3 \times 1) + (2 \times 2 \times 0)] - [(1 \times 1 \times 2) + (0 \times 3 \times (-3)) + (-1 \times 2 \times 4)]$

$= (3 + 12 + 0) - (2 + 0 - 8) = 21$

Jadi, nilai determinan matriks A adalah 21.

Cobalah

Jika $\det \begin{bmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{bmatrix} = 0$, tentukan nilai t yang memenuhi persamaan tersebut.

2. Invers Matriks Persegi

Pada bagian D.1, Anda telah mempelajari determinan dari suatu matriks persegi. Konsep determinan tersebut akan dipergunakan untuk mencari invers dari suatu matriks. Pembahasan dibatasi hanya untuk matriks persegi ordo 2 × 2.

Ketika di SMP, Anda telah mempelajari operasi hitung pada bilangan. Pada saat mempelajari konsep tersebut, Anda dikenalkan dengan istilah invers (kebalikan) bilangan. Suatu bilangan jika dikalikan dengan inversnya akan menghasilkan unsur identitas. Senada dengan hal tersebut, dalam aljabar matriks pun berlaku ketentuan seperti itu. Ketika Anda mengalikan suatu matriks dengan matriks inversnya, akan dihasilkan identitas, yang dalam hal ini adalah matriks identitas.

Sebagai ilustrasi bagi Anda, perhatikanlah perkalian matriks-matriks berikut.

- Misalkan $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Perkalian AB menghasilkan I_2 (matriks identitas berordo 2 × 2)

- Misalkan $P = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ maka

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7+8 & 14-14 \\ -4+4 & 8-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Perkalian PQ menghasilkan I_2.

Berdasarkan perkalian-perkalian tersebut, ada hal yang harus Anda ingat, yaitu perkalian matriks A dan matriks B menghasilkan matriks identitas ($AB = I$) Ini menunjukkan matriks B merupakan matriks invers dari matriks A, yaitu $B = A^{-1}$ atau bisa juga dikatakan bahwa matriks A merupakan invers dari matriks B, yaitu $A = B^{-1}$. Begitu pula untuk perkalian matriks P dan matriks Q berlaku hal serupa.

Dengan demikian, didapatkan definisi dari invers matriks.

Definisi

Definisi Invers Matriks
Misalkan A dan B adalah dua matriks yang berordo 2 × 2 dan memenuhi persamaan $AB = BA = I_2$ maka matriks A adalah matriks invers dari matriks B atau matriks B adalah matriks invers dari matriks A.

Contoh Soal 2.18

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. Apakah matriks B merupakan invers dari matriks A?

b. Apakah matriks C merupakan invers dari matriks D?

Jawab:

a. Matriks B merupakan invers dari matriks A jika memenuhi persamaan $AB = I$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & -2+2 \\ 1-1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Oleh karena $AB = I$ maka matriks B merupakan invers dari matriks A.

b. Matriks C merupakan invers dari matriks D jika memenuhi persamaan $CD = I$

$$CD = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 & 0+2 \\ 0-2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq I$$

Oleh karena $CD \neq I$ maka matriks C bukan invers dari matriks D.

Setelah Anda memahami definisi invers matriks, selanjutnya akan diperlihatkan kepada Anda penurunan rumus invers matriks ordo 2×2 sebagai berikut.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Jika $B = A^{-1}$, bagaimana hubungan antara elemen-elemen pada matriks A dan elemen-elemen pada matriks B? Untuk menjawabnya, Anda mulai dari $B = A^{-1}$, dengan demikian $AB = I$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & aq+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan konsep kesamaan dua matriks, Anda peroleh

$ap + br = 1$ ... (1) $\qquad aq + bs = 0$ ... (3)

$cp + dr = 0$ ... (2) $\qquad cq + ds = 1$ ... (4)

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear (1) dengan (2) dan (3) dengan (4), diperoleh

$$p = \frac{d}{ad-bc} \qquad q = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$r = \frac{-c}{ad-bc} \qquad s = \frac{a}{ad-bc}$$

Dengan demikian,

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Jadi, $B = A^{-1} = \dfrac{1}{(ad - bc)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan $ad - bc \neq 0$

Oleh karena $ad - bc = \det A$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Catatan

A^{-1} terdefinisi jika $\det A \neq 0$, artinya suatu matriks A mempunyai invers jika determinan matriks A tersebut tidak sama dengan nol

Rumus Invers Matriks Berordo 2 × 2

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, invers dari A adalah A^{-1}, yaitu

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan $\det A \neq 0$

Cobalah

Jika M^{-2} adalah invers matriks $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Contoh Soal 2.19

Tentukan invers dari matriks-matriks berikut.

a. $D = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$ b. $W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & 22 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. $\det D = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3(11) - (-7)(-6) = 33 - 42 = -9$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D}\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{6}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{3}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b. $\det W = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(22) - 4(5) = 1$

$$W^{-1} = \frac{1}{\det W}\begin{bmatrix} 22 & -5 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 22 & -5 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -5 \\ -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 2.20

Tentukan invers dari matriks-matriks berikut, jika ada.

a. $A = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. Periksa nilai determinan dari matriks A.

$\det A = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11(1) - 5(2) = 1$

Oleh karena $\det A \neq 0$ maka matriks A memiliki invers

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$$

b. Periksa nilai determinan dari matriks B

$$\det B = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6(2) - 4(3) = 0$$

Oleh karena $\det B = 0$ maka matriks B tidak memiliki invers

Sifat-Sifat Invers suatu Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks sebarang yang memiliki invers, AB dan BA juga memiliki invers maka berlaku hubungan berikut.

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

Untuk lebih memahami sifat-sifat invers matriks tersebut, pelajarilah contoh-contoh berikut.

Contoh Soal 2.21

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a.	A^{-1}	**f.**	BA
b.	B^{-1}	**g.**	$(AB)^{-1}$
c.	$A^{-1} \cdot B^{-1}$	**h.**	$(BA)^{-1}$
d.	$B^{-1} \cdot A^{-1}$	**i.**	Apa kesimpulan yang diperoleh?
e.	AB		

Jawab:

a. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 2(0) = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b. $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -1(5) - (-3)(2) = 1$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

c. $A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0 & -2+0 \\ -10+3 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

d. $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+4 & 0-2 \\ 3+2 & 0-1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

e. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 2+0 \\ -2-3 & 4+5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Catatan

- Matriks yang tidak memiliki invers (determinannya nol) disebut matriks singular.
- Matriks yang memiliki invers (determinannya tidak sama dengan nol) disebut matriks nonsingular

Pembahasan Soal

Jika invers $A = \begin{bmatrix} a & 1+a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka konstanta b adalah ....

a. -4 **d.** -1
b. -2 **e.** 1
c. -1

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1+a \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a & -1-a \\ 0 & a \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} a & -1-a \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1-a}{a^2} \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Oleh karena $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Dengan demikian,

$$b = \frac{-1-a}{a^2} = \frac{-1-1}{1^2} = -2$$

Jadi, nilai konstanta b adalah -2

Jawaban: **b**

Sumber: *SMPB*, 2007

Pembahasan Soal

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan

$B = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Nilai dari $(AB)^{-1}$ = ...

Jawab:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Jadi, $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Jawaban: **e** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Sumber: *UMPTN*, 1995

f. $BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 0+2 \\ -3+10 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

g. $\det AB = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = -1(9) - (-5)(2) = 1$

$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det AB}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

h. $\det BA = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 7(2) = 1$

$(BA)^{-1} = \frac{1}{\det BA}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

i. Berdasarkan hasil dari poin *a* sampai *h*, kesimpulan yang didapat adalah

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
2. $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
3. $(AB)^{-1} \neq (BA)^{-1}$

Contoh Soal 2.22

Jika $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, tentukan nilai x agar matriks A merupakan matriks singular.

Jawab:

Syarat agar A singular adalah $\det A = 0$.$\det A = \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (2x)(4) - (-2)(5) = 8x + 10 = 0$

$$\begin{aligned} 8x + 10 &= 0 \\ 8x &= -10 \\ x &= \frac{-10}{8} \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi agar matriks A singular adalah $-\frac{5}{4}$.

Tes Pemahaman 2.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Dengan menggunakan kata-kata sendiri, jelaskan apa yang dimaksud dengan:
   a. determinan suatu matriks,
   b. dua matriks yang saling invers.
2. Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut.
   a. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} -11 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
3. Tentukan apakah matriks-matriks berikut memiliki invers. Jika ya, tentukan inversnya.
   a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
4. Diketahui $P = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ x-2 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   Jika $\det P = \det Q$, tentukan nilai x.

5. Di bawah ini merupakan matriks-matriks singular, tentukan nilai x, y dan z yang memenuhi.

a. $\begin{bmatrix} -3 & -x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2y & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3z-2 & 8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

6. Diketahui matriks-matriks berikut.

$P = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Q = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $(PQ)^{-1}$

b. $P^{-1}Q^{-1}$

E. Penggunaan Matriks untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari lebih lanjut tentang penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel. Namun sebelumnya, pelajarilah terlebih dahulu bagaimana mencari matriks dari persamaan $AX = B$ dan $XA = B$.

Misalkan A, B, dan X adalah matriks persegi berordo 2×2 dan A matriks non singular. Persamaan $AX = B$ dan $XA = B$ dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep invers matriks yang Anda pelajari pada subbab D sebelumnya.

Dalam hal ini, konsep yang digunakan adalah $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Kasus 1 untuk $AX = B$

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ ***Kedua ruas dikalikan invers matriks A yaitu A^{-1} dari kiri.***

Oleh karena $A^{-1}A = I$ maka diperoleh

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$ karena $IX = X$

Jadi, jika $AX = B$, maka $X = A^{-1}B$

Kasus 2 untuk $XA = B$

$XA = B$

$XA A^{-1} = B A^{-1}$ ***Kedua ruas dikalikan invers matriks A yaitu A^{-1} dari kanan.***

Oleh karena $A A^{-1} = I$ maka diperoleh

$XI = B A^{-1}$

$X = B A^{-1}$ karena $XI = X$

Jadi, jika $XA = B$, maka $X = B A^{-1}$

Contoh Soal 2.23

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, tentukanlah matriks X yang berordo 2×2 yang memenuhi persamaan

a. $AX = B$

b. $XA = B$

Jawab:

$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ maka $\det A = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 7(1) - 6(1) = 1$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$

Pembahasan Soal

Jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan $AB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, maka $A = ...$

a. $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 23 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

Misalkan $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$AB^{-1} = C$

$AB^{-1}B = CB$

$AI = CB$ karena $B^{-1}B = I$

$A = CB$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$

Jawaban: **a**

Sumber: *UMPTN*, 1990

a. $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$$

b. $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 17 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebelumnya Anda pasti telah mengenal beberapa metode yang digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, di antaranya adalah metode grafik, metode subtitusi, metode eliminasi, dan gabungan antara metode subtitusi eliminasi. Pada subbab ini akan dibahas dua metode lagi untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel. Dua metode tersebut adalah

1. metode Invers Matriks,
2. metode Determinan.

1. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Invers Matriks

Untuk memahami penggunaan invers matriks dalam mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel, pelajari uraian berikut.

Misalkan diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}\right\} \dots (1)$$

Sistem persamaan (1) akan diselesaikan dengan menggunakan invers matriks. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

a. Nyatakan sistem persamaan linear tersebut ke dalam bentuk matriks sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 2x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b. Tentukan matriks koefisien serta nilai determinannya. Misalkan matriks koefisien dari sistem (1) diberi nama A, maka

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan det } A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$$

dan misalkan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$

c. Tentukan invers dari matriks koefisiennya. Invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

d. Gunakan konsep jika $AX = B$ maka $X = A^{-1}B$ dan jika $XA = B$ maka $X = BA^{-1}$. Dalam hal ini, sistem (1) memenuhi persamaan $AX = B$ maka $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear pada sistem (1) adalah $x = 2$ dan $y = 1$.

Catatan

Jika det A = 0 maka sistem persamaan linear $AX = B$ ataupun $XA = B$ tidak memiliki penyelesaian

Contoh Soal 2.24

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks

$5x - 3y = 3$

$4x - 2y = 4$

Jawab:

Untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel tersebut dengan menggunakan metode invers matriks, terapkanlah langkah-langkah yang telah dibahas sebelumnya.

Langkah 1:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ misal } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Langkah 2:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \text{ maka det } A = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - (-12) = 2$$

Langkah 3:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah 4:

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x = 3$ dan $y = 4$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(3, 4)\}$.

Cobalah

Perhatikan SPL berikut.

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

Jika $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, gunakan matriks untuk menunjukkan bahwa penyelesaiannya adalah

$$x = \frac{1}{D}\left(c_1b_2 - c_2b_1\right)$$

$$y = \frac{1}{D}\left(a_1c_2 - a_2c_1\right)$$

Tunjukkan pula SPL tidak punya penyelesaian jika $a_1c_2 \neq a_2c_1$, dan punya banyak penyelesaian jika $a_1c_2 = b_1c_2$ dan $b_1c_2 = b_2c_1$

Sumber: *Ebtanas*, 1998

Contoh Soal 2.25

Imas dan Dewi pergi belanja ke pasar. Imas membeli 3 kg kentang dan 2 kg wortel, untuk itu Imas harus membayar Rp13.500,00. Adapun Dewi membeli 2 kg kentang dan 1 kg wortel. Dewi diharuskan membayar Rp8.500,00. Misalkan harga 1 kg kentang adalah *a* rupiah dan harga 1 kg wortel *b* rupiah.

a. Buatlah model matematika dari masalah tersebut dalam bentuk sistem persamaan linear dua variabel dalam variabel *a* dan *b*.

b. Tentukan penyelesaian dari model matematika pada soal a dengan menggunakan metode invers matriks.

c. Berdasarkan jawaban pada soal b jika Rani membeli 4 kg kentang dan 5 kg wortel, berapakah besarnya uang yang harus dibayar oleh Rani?

Jawab:

a. Permasalahan tersebut dapat disusun dalam bentuk tabel berikut.

	Kentang	Wortel	Harga yang Dibayar
Imas	3	2	13.500
Dewi	2	1	8.500

Misalkan harga 1 kg kentang = *a* rupiah

Dan misalkan pula harga 1 kg wortel = *b* rupiah

Sistem persamaan linear dari model tersebut adalah

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b &= 13.500 \\ 2a + b &= 8.500 \end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

b. Penyelesaian dari sistem persamaan linear (1) dengan menggunakan metode invers matriks adalah sebagai berikut.

Bentuk matriks dari sistem persamaan linear (1) adalah

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}\underset{X}{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 13.500 \\ 8.500 \end{bmatrix}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13.500 \\ 8.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.500 + 17.000 \\ 27.000 - 25.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.500 \\ 1.500 \end{bmatrix}$$

Oleh karena $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ maka

$a = 2.500$

$b = 1.500$

c. Besarnya uang yang harus dibayar Rani

$= 4a + 5b$

$= 4\ (2.500) + 5\ (1.500)$

$= 10.000 + 7.500 = 17.500$

Jadi, besarnya uang yang harus dibayar Rani adalah Rp17.500,00.

2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Determinan

Selain digunakan dalam mencari nilai invers dari suatu matriks, determinan dapat pula digunakan dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear. Perhatikan sistem persamaan linear berikut.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}$$

Sistem persamaan linear tersebut, jika diselesaikan akan diperoleh nilai-nilai x dan y sebagai berikut:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Bentuk-bentuk $(c_1b_2 - c_2b_1)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$, dan $(a_1c_2 - a_2c_1)$ jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut:

- $c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Cobalah

Diketahui sistem persamaan berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 4z = -3 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan aturan *cramer*

Sumber: *Ebtanas*, 1995

- $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$
- $a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Dengan demikian, nilai x dan nilai y jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

atau

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}$$

dengan:

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y
- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y yang kolom pertamanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2
- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y yang kolom keduanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2

Berdasarkan uraian tersebut, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

> Misalkan diberikan sistem persamaan linear dua variabel
> $a_1x + b_1y = c_1$
> $a_2x + b_2y = c_2$
> Penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut adalah
> $x = \frac{D_x}{D}$ dan $y = \frac{D_y}{D}$, dengan $D \neq 0$

Catatan

Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode determinan, tidak akan didapat penyelesaiannya jika nilai determinannya sama dengan nol.

Metode penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel cara tersebut dikenal sebagi *metode Cramer*.

Contoh Soal 2.26

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear variabel berikut dengan menggunakan metode determinan

$3x - y = -2$

$-2x + 5y = -12$

Jawab:

Misalkan, A matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \det\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 15 - 2 = 13$$

Oleh karena det $A \neq 0$ maka metode determinan bisa digunakan

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix}}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -12 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-26}{13} = -2$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = 1$ dan $y = -2$

Contoh Soal 2.27

Dani dan Firman bekerja di perusahaan yang sama. Dalam seminggu, Dani bekerja 5 hari dan 4 hari lembur, untuk itu upah yang diterimanya dalam seminggu itu Rp260.000,00. Adapun Firman bekerja 6 hari dan 3 hari lembur, upah yang diterimanya Rp285.000,00. Jika Ade bekerja di perusahaan yang sama, berapakah upah yang diterima Ade jika Ade bekerja 4 hari dan 4 hari lembur?

Jawab:

Permasalahan tersebut dapat disusun dalam bentuk tabel berikut.

	Kerja	Lembur	Besarnya Upah
Dani	5	4	260.000
Firman	6	3	285.000

Misalkan kerja per harinya dinyatakan dengan x, dan lembur per harinya dinyatakan dengan y

Sistem persamaan linear dari model tersebut adalah

$5x + 4y = 260.000$

$6x + 3y = 285.000$

Misalkan, A matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 24 = -9$$

Oleh karena det $A \neq 0$ maka metode determinan bisa digunakan

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26.0000 & 4 \\ 28.5000 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-36.0000}{-9} = 40.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 26.0000 \\ 6 & 28.5000 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-13.5000}{-9} = 15.000$$

Diperoleh $x = 40.000$ dan $y = 15.000$

Model matematika dari masalah Ade adalah $4x + 4y$

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 4\,(40.000) + 4\,(15.000) \\ &= 160.000 + 60.000 \\ &= 220.000 \end{aligned}$$

Jadi, upah yang diterima Ade setelah bekerja 4 hari dan 4 hari lembur adalah Rp220.000,00.

Metode determinan dapat pula digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel. Perhatikan uraian berikut.

Misalkan terdapat sistem persamaan linear tiga variabel berikut.

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

Dengan melakukan cara yang sama seperti pada sistem persamaan linear dua variabel, diperoleh penyelesaian sebagai berikut.

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}$$

dengan

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x, y, dan z.
- $D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x, y, dan z yang kolom keduanya diganti dengan konstanta d_1, d_2, dan d_3.
- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x, y, dan z yang kolom keduanya diganti dengan konstanta d_1, d_2, dan d_3.
- $D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$, yaitu determinan dari matriks koefisien x, y, dan z yang kolom ketiganya diganti dengan konstanta d_1, d_2, dan d_3.

Contoh Soal 2.28

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear variabel berikut dengan menggunakan metode determinan

$2x - y + 2z = -2$
$3x + 2y - z = 0$
$-x + y + z = 4$

Jawab:

Misalkan A matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \det A = \left|\begin{matrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 4 - 1 + 6 + 4 + 2 + 3 = 18$$

$$D_x = \left|\begin{matrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} = -4 + 4 + 0 - 16 - 2 + 0 = -18$$

Pembahasan Soal

Jika (a, b, c) adalah solusi sistem persamaan linear

$x + y + 2z = 9$
$2x + 4y - 3z = 1$
$3x + 6y - 5z = 0$

maka $a + b + c = ...$

a. 6 **d.** 9
b. 7 **e.** 10
c. 8

Jawab:

Misalkan A matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix} = -1$$

$$D_x = \left[\begin{matrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{matrix} = -1$$

$$D_y = \left[\begin{matrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = -2$$

$$D_z = \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix} = -3$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Dengan demikian, diperoleh penyelesaian

(a, b, c) = (x, y, z) = (1, 2, 3)

Jadi, nilai

$a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$

Jawaban: **a**

Sumber: *SPMB*, 2007

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{matrix} = 0 - 2 + 24 + 0 + 8 + 6 = 36$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 16 + 0 - 6 - 4 + 0 + 12 = 18$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{18} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{36}{18} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{18}{18} = 1$$

Jadi, penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut adalah $x = -1$, $y = 2$, dan $z = 1$.

Tugas 2.2

Bersama teman sebangkumu, carilah masalah dalam kehidupan sehari-hari yang bisa dimodelkan ke dalam bentuk sistem persamaan linear tiga variabel, kemudian tentukan penyelesaiannya dengan menggunakan metode determinan. Presentasikan hasilnya di depan kelas.

Tes Pemahaman 2.4

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Jika X matriks berordo 2×2, tentukan matriks X yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

b. $X \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers mariks dan metode determinan.

a. $3x - 2y = -8$
$4x + 2y = 2$

b. $2x + y = 1$
$3x + 4y = 14$

c. $-2x + 6y = -12$
$4x - 5y = 17$

d. $-2x - y = -5$
$5x + 3y = 11$

3. Diketahui a dan b memenuhi persamaan

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai-nilai dari:

a. $x + y$

b. $2x^2 + y$

4. Rian dan Anwar bekerja pada perusahaan yang sama. Minggu kemarin mereka melaksanakan pertemuan selama seminggu di luar kota sehingga keduanya harus menginap di hotel. Selama seminggu tersebut mereka menginap di dua hotel. Rian menginap di hotel A selama 4 hari dan di hotel B selama 3 hari, sedangkan Anwar menginap di hotel A selama 2 hari dan sisanya dari 1 minggu tersebut Anwar menginap di hotel B. Jika biaya penginapan yang dihabiskan Rian selama seminggu tersebut Rp2.250.000,00 dan biaya penginapan Anwar Rp2.000.000,00, tentukan tarif dari masing-masing penginapan per harinya.

5. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan metode determinan.

a. $-a + 7b + c = -6$
$4a + b - 2c = 1$
$3a - 2b + 4c = 20$

b. $3a - b - 2c = -9$
$a + 5b - 3c = -7$
$-2a + 3a + 4c = 32$

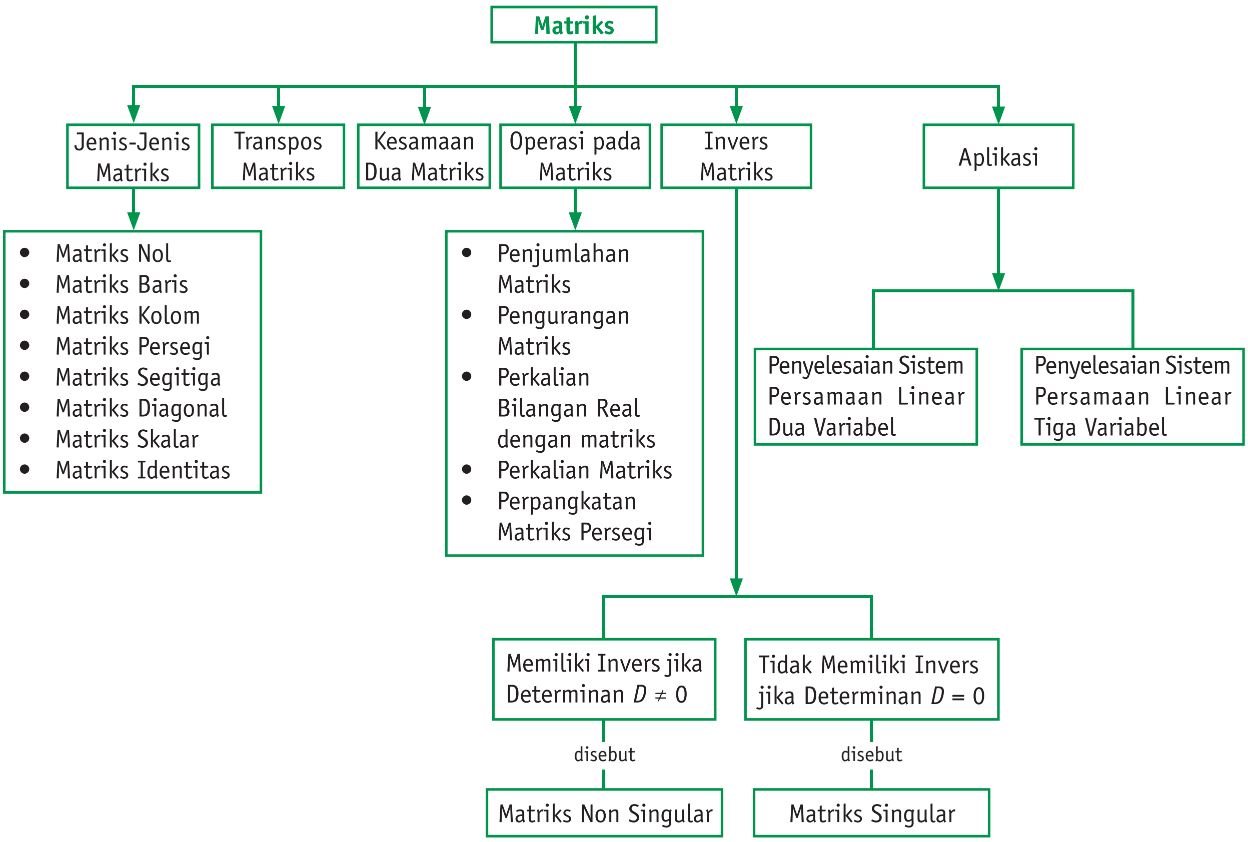
Rangkuman

1. Matriks adalah sekelompok bilangan yang disusun menurut baris dan kolom dalam tanda kurung dan berbentuk seperti sebuah persegipanjang.
2. Ordo matriks menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom yang dimiliki suatu matriks.
3. Jenis-jenis matriks di antaranya matriks nol, matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks skalar, dan matriks identitas.
4. Transpos matriks A adalah matriks baru yang disusun dengan menuliskan elemen setiap baris matriks A menjadi elemen setiap kolom pada matriks baru. Notasi transpos mastriks A adalah A^t.
5. Dua buah matriks dikatakan sama jika dan hanya jika keduanya memiliki ordo yang sama dan elemen-elemen yang seletak (bersesuaian) pada kedua matriks tersebut sama.
6. Jika A dan B adalah dua matriks yang berordo sama, maka jumlah dari matriks A dan B ditulis $(A + B)$ adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara menjumlahkan setiap elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak. Hal ini berlaku pula pada pengurangan matriks.
7. Perkalian antara sebarang bilangan real k dengan matriks A adalah matriks baru yang diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen matriks A.
8. Perkalian antara dua matriks terdefinisi apabila banyaknya kolom matriks pengali sama dengan banyaknya baris matriks yang dikalikan.
9. Determinan adalah selisih antara perkalian elemen-elemen pada diagonal utama dengan perkalian elemen-elemen pada diagonal sekunder.
10. Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \det A \neq 0$$

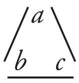
Peta Konsep

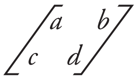


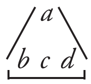
Tes Pemahaman Bab 2

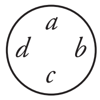
Kerjakanlah di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Di antara bentuk berikut, manakah yang memenuhi definisi matriks?
   - **a.** 

   - **b.** 

   - **c.** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
   - **d.** 

   - **e.** 

2. Diketahui $G = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$, matriks G merupakan matriks ....
   - **a.** skalar
   - **b.** diagonal
   - **c.** Identitas
   - **d.** persegi
   - **e.** kuadrat

3. Transpos dari matriks $K = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ....
   - **a.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
   - **b.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
   - **c.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
   - **d.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   - **e.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Jika $L = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ maka nilai $L - 2M$ adalah ....
   - **a.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   - **b.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
   - **c.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   - **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$
   - **e.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

5. Matriks-matriks berikut dapat dikalikan dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *kecuali* ....
   - **a.** $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$
   - **b.** $\begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$
   - **c.** $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{bmatrix}$
   - **d.** $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$
   - **e.** $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}$

6. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3b & 4a+b \\ c & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Jika $A = B$ maka nilai $a + b + c = ...$
   - **a.** 5
   - **b.** 6
   - **c.** 7
   - **d.** 8
   - **e.** 9

7. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka $A^2 = ...$
   - **a.** $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$
   - **b.** $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
   - **c.** $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$
   - **d.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$
   - **e.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

8. Invers dari matriks $P = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah ....
   - **a.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
   - **b.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$
   - **c.** $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$
   - **d.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
   - **e.** $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

9. Jika $Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ maka $|Q| = ...$
   - **a.** –7
   - **b.** 3
   - **c.** 7
   - **d.** 8
   - **e.** 10

10. Jika $\begin{vmatrix} x & -3 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = 6$ maka nilai $x = ...$
    - **a.** –2 dan 6
    - **b.** –6 dan 2
    - **c.** –3 dan 4
    - **d.** –4 dan 3
    - **e.** –4 dan –3

11. Matriks P yang memenuhi $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ adalah ....
    - **a.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$
    - **b.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
    - **c.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$
    - **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$
    - **e.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

12. Jika $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix}$ maka nilai x dan y berturut-turut adalah ....
   a. -5 dan -2
   b. -2 dan 5
   c. -5 dan 2
   d. 2 dan -5
   e. 5 dan -2

13. Diketahui sistem persamaan linear berikut.
   $2x - 3y = -18$
   $4x + y = -8$
   Nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan linear tersebut adalah ....
   a. $x = 3$ dan $y = -4$
   b. $x = 3$ dan $y = 4$
   c. $x = -3$ dan $y = 4$
   d. $x = -3$ dan $y = -4$
   e. $x = 4$ dan $y = 3$

14. Nilai x dan y yang memenuhi persamaan
   $\begin{bmatrix} x & 5 \\ -2 & y \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} y & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ adalah ....
   a. $x = 2$ dan $y = -3$
   b. $x = 3$ dan $y = -4$
   c. $x = -2$ dan $y = 3$
   d. $x = -3$ dan $y = 4$
   e. $x = 2$ dan $y = -4$

15. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, nilai k yang memenuhi persamaan $\det A^t = k \det A^{-1}$ adalah ....
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5

16. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 3 \\ 6x-1 & 5 \end{bmatrix}$ tidak memiliki invers, maka nilai x adalah ....
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

17. Diketahui persamaan $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$. Nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah ....
   a. 6 dan -6
   b. 7 dan -7
   c. 8 dan -8
   d. 9 dan -9
   e. 5 dan -5

18. Jika $ABX = C$ maka $X = ...$
   a. $CB^{-1}A^{-1}$
   b. $CA^{-1}B^{-1}$
   c. $B^{-1}CA^{-1}$
   d. $B^{-1}A^{-1}C$
   e. $A^{-1}B^{-1}C$

19. Jika $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka $(A - B^{-1})^{-1} = ...$
   a. $\begin{bmatrix} 7 & 23 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 23 & 13 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$

20. Jika D adalah invers dari matriks $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ maka nilai $D\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah ....
   a. $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

II. Kerjakan soal-soal berikut.

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan:
   a. BC
   b. C^tB
   c. $AB - (AB)^{-1}$

2. Diketahui sistem persamaan linear
   $4x + 3y = 17$
   $2x - 5y = 15$
   Gunakan metode invers dan determinan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut.

3. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tentukan $(AB)^{-1} - A^t$.

4. Jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ dan $f(x) = x^2 + 2x$, tentukan $f(A)$.

5. Pada liburan semester, sekolah A dan sekolah B mengadakan karyawisata ke Bali. Sekolah A menyewa 10 bus dan 5 mobil. Sekolah B menyewa 7 bus dan 3 mobil. Biaya sewa kendaraan sekolah A sebesar Rp41.250.000,00, sedangkan sekolah B Rp28.250.000,00. Jika diasumsikan biaya sewa per bus dan per mobil kedua sekolah tersebut sama, tentukan harga sewa 1 bus dan 1 mobil.

Refleksi Akhir Bab

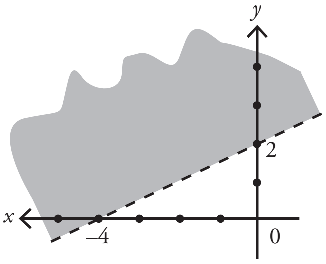
Berilah tanda √ pada kolom yang sesuai dengan pemahaman Anda mengenai isi bab ini. Setelah mengisinya, Anda akan mengetahui pemahaman Anda mengenai isi bab yang telah dipelajari.

No	Pertanyaan	Jawaban			
		Tidak	Sebagian Kecil	Sebagian Besar	Seluruhnya
1.	Apakah Anda memahami pengertian, ciri-ciri, jenis-jenis, dan transpos matriks?				
2.	Apakah Anda memahami cara-cara menuliskan informasi dalam bentuk matriks?				
3.	Apakah Anda mamahami cara-cara menjumlahkan, mengurangkan, mengalikan, dan memangkatkan matriks?				
4.	Apakah Anda memahami langkah-langkah menentukan determinan martis berordo 2×2 dan 3×3?				
5.	Apakah Anda memahami cara menentukan invers matriks berordo 2×2 dan 3×3?				
6.	Apakah Anda menguasai cara menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel dengan menggunakan invers matriks dan *metode cramer*?				
7.	Apakah Anda menguasai cara menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear tiga variabel dengan *metode cramer*?				
8.	Apakah Anda mengerjakan soal-soal pada bab ini?				
9.	Apakah Anda melakukan **Kegiatan** dan mengerjakan **Tugas** pada bab ini?				
10.	Apakah Anda berdiskusi dengan teman-teman Anda apabila ada materi-materi yang belum Anda pahami?				

Evaluasi Semester 1

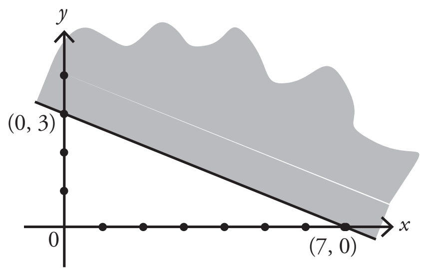
Kerjakanlah di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. 

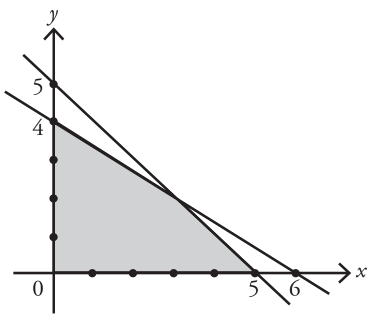
Daerah himpunan yang diarsir menunjukkan daerah ....

a. $-x + 2y \le 4$
b. $-x + 2y > 4$
c. $x - 2y < 4$
d. $x - 2y > 4$
e. $x - 2y \ge 4$

2. 

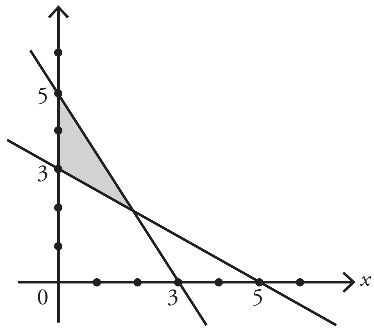
Sistem pertidaksamaan yang menunjukkan himpunan penyelesaian dari daerah yang diarsir pada gambar di atas adalah ....

a. $7x + 3y \ge 21, x \ge 0, y \ge 0$
b. $7x + 3y \le 21, x \ge 0, y \ge 0$
c. $3x + 7y \ge 21, x \ge 0, y \ge 0$
d. $3x + 7y \le 21, x \ge 0, y \ge 0$
e. $3x + 7y \le 21, x \le 0, y \ge 0$

3. 

Sistem pertidaksamaan yang memenuhi himpunan penyelesaian pada gambar di atas adalah ....

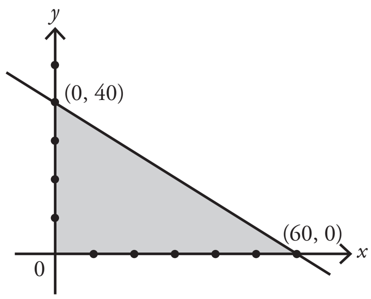
a. $x + y \le 5, 2x + 3y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$
b. $x + y \ge 5, 2x + 3y \ge 12, x \ge 0, y \ge 0$
c. $x + y \le 5, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$
d. $x + y \le 5, 3x + 2y \ge 12, x \le 0, y \le 0$
e. $x + y \le 5, 3x + 2y \le 12, x \le 0, y \ge 0$

4. 

Daerah yang diarsir pada gambar di atas, ditunjukkan oleh sistem pertidaksamaan ....

a. $5x + 3y \le 15, 3x + 5y \le 15, x \ge 0, y \ge 0$
b. $5x + 3y \ge 15, 3x + 5y \ge 15, x \ge 0, y \ge 0$
c. $5x + 3y \le 15, 3x + 5y \ge 15, x \ge 0, y \ge 0$
d. $5x + 3y \ge 15, 3x + 5y \le 15, x \ge 0, y \ge 0$
e. $5x + 3y \le 15, 3x + 5y < 15, x \ge 0, y \ge 0$

5. Nilai maksimum dari fungsi objektif $z = x + 3y$ pada daerah yang diarsir di bawah ini adalah ....

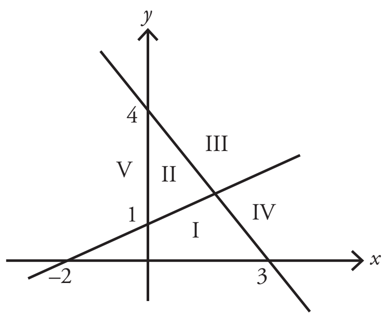


a. 220
b. 180
c. 120
d. 60
e. 40

6. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$$\begin{aligned} 2y - x &\le 2 \\ 4x + 3y &\le 12 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

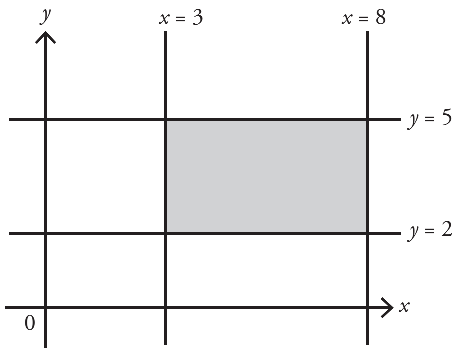
terletak di daerah ....



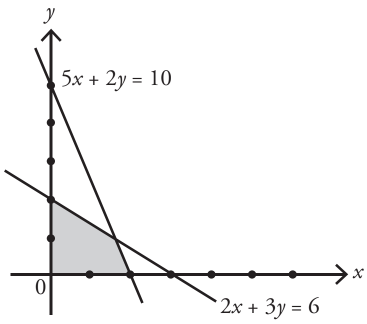
a.	I	**d.**	I dan IV
b.	II	**e.**	II dan III
c.	III		

7. Nilai minimum fungsi $f(x, y) = 40x + 10y$ dengan syarat $2x + y \geq 12$, $x + y \geq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ....
   a. 100 **d.** 240
   b. 120 **e.** 400
   c. 160

8. Diketahui (x, y) yang memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6$, $5x + 2y \geq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Nilai maksimum fungsi tujuan $f(x, y) = x + 2y$ adalah ....
   a. 3 **d.** 16
   b. 7 **e.** tidak ada
   c. 11

9. 

   Daerah yang diarsir pada gambar tersebut merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $3 \leq y \leq 8$ dan $2 \leq y \leq 5$, $x, y \in R$.
   Nilai maksimum fungsi tujuan $f(x, y) = 3x - y$ dari himpunan penyelesaiannya adalah ....
   a. 4 **d.** 22
   b. 7 **e.** 29
   c. 19

10. Nilai maksimum fungsi $z = 3x + 4y$ terletak pada titik


    a. $\{z \mid 0 \leq z \leq 2\}$
    b. $\{z \mid -2 \leq z \leq 0\}$
    c. $\{z \mid -4 \leq z \leq 4\}$
    d. $\{z \mid 2 \leq z \leq 11\}$
    e. $\{z \mid 4 \leq z \leq 13\}$

11. Dengan persediaan kain polos 20 m dan kain bergaris 10 m seorang penjahit akan membuat pakaian jadi. Model I memerlukan 1 m kain polos dan 1,5 m kain bergaris. Model II memerlukan 2 m kain polos dan 0,5 m kain bergaris. Jumlah total pakaian jadi akan maksimum jika model I dan model II masing-masing ....
    a. 4 dan 8 **d.** 7 dan 5
    b. 5 dan 9 **e.** 8 dan 6
    c. 8 dan 4

12. Suatu tempat parkir luasnya 200 m^2. Untuk memarkir sebuah mobil, rata-rata diperlukan tempat seluas 10 m^2 dan untuk bus rata-rata 20 m^2. Tempat parkir itu tidak dapat menampung lebih dari 12 mobil dan bus. Jika di tempat parkir itu akan di parkir x mobil dan y bus, maka x dan y harus memenuhi syarat-syarat ....
    a. $x + y \leq 12$, $x + 2y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
    b. $x + y \leq 12$, $x + 2y \geq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
    c. $x + y \leq 12$, $x + 2y \leq 20$, $x \leq 0$, $y \leq 0$
    d. $x + y \leq 12$, $x + 2y \geq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
    e. $x + y \geq 5$, $x + 2y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

13. Diketahui
    $A = \begin{bmatrix} 3p & 2 \\ 4 & -5q \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p+8 & 2 \\ 4 & 30 \end{bmatrix}$
    Jika $A = B$ maka ....
    a. $p = 3, q = 6$ **d.** $p = -3, q = 6$
    b. $p = 4, q = 6$ **e.** $p = 4, q = -6$
    c. $p = 3, q = -6$

14. $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
    maka $P + Q = ...$
    a. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
    b. $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$
    c. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

15. Diketahui
    $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
    Nilai $A - 2B = ...$
    a. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
    b. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
    c. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

16. Diketahui

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Nilai $B \cdot A = ...$

a. $\begin{bmatrix} 7 & 19 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

17. Diketahui

$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 3k+1 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Nilai k yang memenuhi $A + B = C^{-1}$ adalah ....

a. -1
b. -3
c. 2
d. 1
e. 3

18. Ditentukan

$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Pernyataan berikut yang benar adalah ....

a. $A + B + C = 2D$
b. $(A + B) - C = D - C$
c. $A - B = D - C$
d. $D - B = A - C$
e. $A + C = B + D$

19. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & 2x \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & x \end{bmatrix}$.

Agar determinan matriks P sama dengan dua kali determinan matriks Q, maka nilai x adalah ....

a. $x = -6, x = -2$
b. $x = 6, x = -2$
c. $x = 6, x = 2$
d. $x = 3, x = -4$
e. $x = 3, x = 4$

20. Diketahui $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Jika $A^t = A^{-1}$, maka $ad - bc = ...$

a. -1 atau $-\sqrt{2}$
b. 1 atau $\sqrt{2}$
c. $-\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2}$
d. -1 atau 1
e. 1 atau $-\sqrt{2}$

21. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, dan matriks C memenuhi $AC = B$, maka det $C = ...$

a. 1
b. 6
c. 9
d. 11
e. 12

22. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} B$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

23. Jika $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$ maka $5x - y = ...$

a. 7
b. 8
c. 9
d. 10
e. 11

24. Determinan matriks B yang memenuhi persamaan $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6
e. 7

25. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka $(B^{-1} A)^{-1} = ...$

a. $\begin{bmatrix} 36 & -3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 15 & 26 \end{bmatrix}$

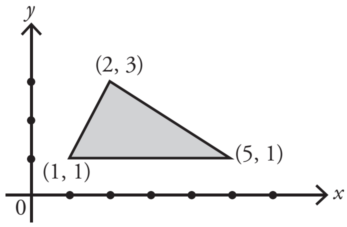
c. $\begin{bmatrix} 9 & 26 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 36 & -3 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 36 & -1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$

II. Kerjakan soal-soal berikut.

26. Perhatikan gambar berikut.



Tentukan sistem pertidaksamaan yang menunjukkan himpunan penyelesaian dari daerah yang diarsir pada gambar di atas.

27. Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk rumah tipe A, diperlukan 100 m^2 dan tipe B diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp6.000.000,00/unit dan tipe B adalah Rp4.000.000,00/unit. Tentukan keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut.

28. Diketahui matriks

$A = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Jika $A \times B = C$, tentukan nilai k yang memenuhi persamaan tersebut.

29. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2x+1 & 3 \\ 6x-1 & 5 \end{bmatrix}$ tidak memiliki invers, tentukan nilai x dari matriks tersebut.

30. Sistem persamaan linear $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + 2z = 12 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}$

memiliki himpunan penyelesaian $\{(x, y, z)\}$ Tentukan nilai:

a. $x\,y\,z$

b. $x^2 + 2yz$

Bab

3

Sumber: www.jakarta.go.id

Barisan dan Deret

Matematika dapat dikatakan sebagai bahasa simbol. Hal ini dikarenakan matematika banyak menggunakan simbol-simbol. Dengan menggunakan simbol-simbol tersebut, ungkapan-ungkapan yang panjang dapat ditampilkan dalam bentuk yang pendek dan sederhana.

Salah satu simbol dalam matematika adalah notasi sigma yang dilambangkan dengan "Σ". Notasi ini banyak digunakan untuk menyatakan jumlah dari suku-suku barisan atau deret.

Salah satu contoh penggunaan barisan dan deret adalah untuk menyelesaikan permasalahan berikut. Misalnya, sebuah bank swasta memberikan bunga 2% per bulan terhadap tabungan para nasabahnya. Jika seorang nasabah menabung sebesar Rp500.000,00, berapa jumlah uang nasabah tersebut jika tabungannya baru diambil setelah 5 bulan.

Kuis

Cobalah kerjakan soal-soal berikut untuk mengetahui pemahaman Anda mengenai bab ini.

1. Carilah barisan bilangan kelipatan 5 mulai dari 1 sampai dengan 50.
2. Carilah barisan bilangan kelipatan 4 mulai dari 1 sampai dengan 30.
3. Carilah jumlah sepuluh bilangan asli ganjil yang pertama.
4. Carilah jumlah sepuluh bilangan kelipatan tiga yang pertama.
5. Carilah jumlah dua puluh bilangan asli pertama.

A. Barisan dan Deret Aritmetika

Materi barisan dan deret telah Anda pelajari sewaktu di SMP. Sebelum mengkaji kembali mengenai barisan dan deret aritmetika, berikut ini akan diuraikan kembali mengenai istilah barisan dan deret bilangan.

Untuk mengingatkan definisi dan baris bilangan, coba Anda perhatikan beberapa contoh berikut.

- Susunan bilangan asli : 1, 2, 3, 4, ..., n, ...
- Susunan bilangan ganjil: 1, 3, 5, 7, ..., $2n$–1, ...
- Susunan bilangan genap: 2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ...
- Susunan bilangan kelipatan tiga: 3, 6, 9, 12, ..., $3n$, ...

Berdasarkan contoh-contoh tersebut, Anda dapat melihat bilangan seperti inilah yang dinamakan barisan bilangan.

Definisi

Definisi Barisan Bilangan
Barisan bilangan adalah urutan bilangan-bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu.

Jika barisan bilangan tadi dijumlahkan maka terbentuklah deret bilangan.

Definisi

Definisi Deret Bilangan
Deret bilangan adalah penjumlahan dari suku-suku barisan bilangan.

Sebagai contoh, jika 1, 2, 3, 4, ... merupakan barisan bilangan maka deret dari barisan bilangan tersebut adalah 1 + 2 + 3 + 4 + ...

1. Barisan Aritmetika

Untuk memahami barisan aritmetika, pelajari uraian berikut.

Di suatu *counter pulsa*, dijual berbagai macam kartu perdana dan *voucher* pulsa dengan harga beragam.

Jika Heru membeli sebuah kartu perdana maka dikenakan harga Rp12.000,00, jika Heru membeli dua kartu perdana maka dikenakan harga Rp20.000,00. Jika Heru membeli tiga kartu perdana, dikenakan harga Rp28.000,00. Begitu seterusnya, setiap penambahan pembelian satu kartu perdana, harga pembelian bertambah Rp8.000,00. Apabila harga pembelian kartu perdana tersebut disusun dalam suatu bilangan maka terbentuk barisan berikut (dalam ribuan), yaitu 12, 20, 28, 36, 44, dan seterusnya.

Dari contoh tersebut, Anda lihat bahwa setiap dua suku yang berurutan memiliki beda yang tetap. Barisan yang memiliki beda yang tetap dinamakan barisan aritmetika.

Definisi

Definisi Barisan Aritmetika
Suatu barisan dikatakan sebagai barisan aritmetika jika selisih antara dua suku yang berurutan selalu tetap. Bilangan (selisih) tetap tersebut disebut sebagai beda (b).

Definisi tersebut jika diubah ke bentuk notasi adalah sebagai berikut.

Jika $U_1, U_2, U_3, ..., U_{n-1}, U_n$ adalah suatu barisan bilangan maka barisan tersebut dikatakan sebagai barisan aritmetika apabila memenuhi hubungan berikut.

$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = ... U_n - U_{n-1}$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh Soal 3.1

Di antara barisan-barisan bilangan berikut, tentukan manakah yang merupakan barisan aritmetika.

a. 1, 4, 7, 10, ...
b. 3, 6, 12, 24, ...
c. 44. 41, 38, 35, ...

Jawab:

Untuk menentukan apakah suatu barisan termasuk barisan aritmetika atau bukan, hal yang harus diperhatikan adalah beda dari setiap dua suku berurutan dalam barisan tersebut. Jika bedanya tetap maka barisan tersebut merupakan barisan aritmetika.

a. Beda antara dua suku yang berurutan dari barisan 1, 4, 7, 10, ... adalah
$4 - 1 = 3, 7 - 4 = 3, 10 - 7 = 3$
Beda dari barisan ini tetap sehingga 1, 4, 7, 10, ... adalah barisan arimetika.

b. Beda antara dua suku yang berurutan dari barisan 3, 6, 12, 24,...
$6 - 3 = 3, 12 - 6 = 6, 24 - 12 = 12$
Beda dari barisan ini tidak tetap sehingga barisan 3, 6, 12, 24, ... bukan barisan aritmetika.

c. Beda antara dua suku yang berurutan dari barisan 44, 41, 38, 35, ...
$41 - 44 = -3, 38 - 41 = -3, 35 - 38 = -3$
Beda dari barisan ini tetap sehingga barisan 44, 42, 38, 35, ... adalah barisan aritmetika.

Cobalah

Jumlah suatu deret aritmetika adalah 20. Suku pertama deret tersebut adalah 8 dan bedanya–2. Jika banyaknya suku adalah *n*, maka *n* adalah

Sumber: *SPMB,* 2004

Jika Anda diminta menentukan suku ke 101 dari barisan bilangan asli, tentu saja Anda dengan mudahnya dapat menjawab pertanyaan tersebut. Akan tetapi, Bila Anda diminta menentukan suku ke 101 dari barisan bilangan ganjil, Anda akan menemui kesulitan Bila diminta menjawab secara spontan dan tidaklah mungkin jika Anda harus mencarinya dengan mengurutkan satu per satu dari suku awal sampai suku yang ditanyakan. Untuk itulah diperlukan suatu aturan untuk menentukan suku-suku yang dicari, supaya dapat menentukan suku tertentu dari suatu barisan aritmetika. Untuk itu, pelajarilah penurunan rumus suku ke–*n* berikut dengan baik.

Misalkan $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ adalah barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b maka Anda dapat menuliskan:

$$\begin{aligned}
U_1 &= a \\
U_2 &= U_1 + b = a + b \\
U_3 &= U_2 + b = a + b + b = a + 2b = a + (3 - 1)b \\
U_4 &= U_3 + b = a + 2b + b = a + 3b = a + (4 - 1)b \\
&\vdots \\
U_n &= U_{n-1} + b = a + (n - 1)b
\end{aligned}$$

Berdasarkan pola dari suku-suku pada barisan tersebut, Anda dapat menentukan rumus suku ke–n suatu barisan aritmetika, sebagai berikut.

Rumus suku ke–n dari suatu Barisan Aritmetika.
Misalkan terdapat suatu barisan aritmetika U_1, U_2 ..., U_n maka rumus umum suku ke-n dengan suku pertama a dan beda b adalah

$$U_n = a - (n - 1)b$$

Pembahasan Soal

Lima belas bilangan membentuk deret aritmetika dengan beda positif. Jika jumlah suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 188 dan selisih suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 14, maka jumlah dari lima suku terakhir adalah....

a. 362 **d.** 428
b. 384 **e.** 435
c. 425

Jawab:

- $U_{15} - U_{13} = 14$
  $(a + 14b) - (a + 12b) = 14$
  $b = 7$
- $U_{13} + U_{15} = 188$
  $(a + 12b) + (a + 14b) = 188$
  $2a + 26(7) = 188$
  $a = 3$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2 \cdot 3 + 14 \cdot 7\right] = 780$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2 \cdot 3 + 9 \cdot 7\right] = 345$$

Jadi, jumlah lima suku terakhir $= S_{15} - S_{10} = 780 - 345 = 435$

Jawaban: **e**

Sumber: *SPMB, 2004*

Contoh Soal 3.2

Diketahui barisan aritmetika 7, 11, 15, 19, ...

a. Tentukan rumus suku ke–n dari barisan tersebut.
b. Suku ke–11 dari barisan tersebut.

Jawab:

a. 7, 11, 15, 19, ...
Dari barisan tersebut diketahui suku pertama $a = 7$ dan beda barisan $b = 11 - 7 = 15 - 11 = 19 - 15 = 4$. Dengan demikian, suku ke–n dari barisan tersebut adalah

$$U_n = a + (n - 1)\,b$$
$$U_n = 7 + (n - 1)\,4$$
$$U_n = 4n + 3$$

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $U_n = 4n + 3$.

b. Berdasarkan jawaban **a**, diperoleh $U_n = 4n + 3$. Dengan demikian,

$$U_{11} = 4\,(11) + 3 = 44 + 3 = 47$$

Jadi, suku ke–11 dari barisan tersebut adalah 47.

Contoh Soal 3.3

Suku ke–4 dari suatu barisan aritmetika adalah 17 dan suku ke–12 dari barisan tersebut adalah 81. Tentukan suku ke–25 dari barisan tersebut.

Jawab:

Suku ke–4 = $U_4 = a + 3b = 17$ ... (1)
Suku ke–12 = $U_{12} = a + 11b = 81$ ...(2)
Dengan menggunakan metode penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel, diperoleh suku pertama $a = -7$ dan beda barisan $b = 8$. Coba Anda buktikan. Dengan demikian, suku ke–25 dari barisan tersebut adalah

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$U_{25} = -7 + (25 - 1)\,8 = -7 + 192 = 185$$

Jadi, suku ke–25 dari barisan aritmetika tersebut adalah 185.

Contoh Soal 3.4

Diketahui tiga buah bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 15 dan hasil kali ketiga bilangan tersebut adalah 80 maka tentukan nilai ketiga bilangan tesebut.

Jawab:

Misalkan, suku tengah ketiga bilangan tersebut adalah x, beda barisan tersebut adalah b maka suku pertama barisan adalah $x - b$ dan suku ketiganya $x + b$. Jadi, barisan aritmetikanya adalah $x - b, x, x + b$.
Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 15. Artinya,

$$(x - b) + x + (x + b) = 15$$
$$3x = 15$$
$$x = 5$$

Substitusikan nilai $x = 5$ ke dalam barisan, diperoleh $5 - b, 5, 5 + b$

Hasil kali ketiga bilangan tersebut adalah 80, artinya:

$$\begin{aligned}(5 - b)(5)(5 + b) &= 80\\ 125 - 5b^2 &= 80\\ 45 &= 5b^2\\ b^2 &= 9\\ b &= \pm 3\end{aligned}$$

Ambil $b > 0$ maka ketiga bilangan tersebut adalah

$x - b,\quad x,\quad x + b$

$5 - 3,\quad 5,\quad 5 + 3$

$2,\quad 5,\quad 8$

Jadi, nilai ketiga bilangan yang membentuk barisan aritmetika tersebut adalah 2, 5, dan 8.

2. Deret Aritmetika

Anda telah mengetahui bahwa penjumlahan dari barisan bilangan dikenal sebagai deret bilangan. Begitu pula jika Anda menjumlahkan suatu barisan aritmetika maka Anda akan mendapatkan suatu deret aritmetika. Berikut definisi dari deret aritmetika.

Definisi

Definisi Deret Aritmetika

Misalkan $U_1, U_2, \ldots, U_n$ adalah barisan aritmetika maka penjumlahan $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ adalah deret aritmetika.

Sebagai contoh, jika Anda memiliki barisan aritmetika 2, 5, 8, 11, ... kemudian menjumlahkan setiap suku dalam barisan aritmetika tersebut maka Anda akan memperoleh deret aritmetika 2 + 5 + 8 + 11 + ... Secara umum, dari suatu barisan $U_1, U_2, \ldots, U_n$ dengan $U_1 = a$ dan beda b, Anda dapat memperoleh bentuk umum deret aritmetika, yaitu

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)\, b)$

Dari suatu deret aritmetika, Anda dapat memperoleh suatu jumlah. Jika S_n menyatakan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmetika maka Anda memperoleh

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n-1)\, b).$$

Sebagai ilustrasi, pelajari uraian berikut ini.

Jika Anda memiliki barisan 30, 40, 50, ..., 100, 110, 120 maka untuk mendapatkan jumlah S, Anda memerlukan rumus yang lebih praktis dibandingkan dengan cara menjumlahkan satu per satu. Sebaiknya Anda perhatikan yang berikut ini.

$$\begin{array}{rcl} S_{10} &=& 30 + 40 + 50 + \ldots + 100 + 110 + 120 \quad \textit{sama nilainya dengan}\\ S_{10} &=& 120 + 110 + 100 + \ldots + 50 + 40 + 30 \quad + \\ \hline 2S_{10} &=& 150 + 150 + 150 + \ldots + 150 + 150 + 150 \end{array}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} 2S_{10} &= 10 \times 150\\ S_{10} &= \frac{10 \times 150}{2}\\ &= \frac{1.500}{2}\\ S_{10} &= 750 \end{aligned}$$

Tokoh Matematika

Johan Gauss (1771 - 1885)

Sumber: *www.upload.wifimedia.org*

Johan Gauss adalah seorang jenius dalam aritmetika. Ketika ia berusia 9 tahun seorang guru menyuruh murid-muridnya di kelas untuk menjumlahkan deret bilangan 1 + 2 + 3 + ... + 40. Gauss hanya memerlukan waktu beberapa saat saja untuk memperoleh jawaban "820". Bahkan tanpa menulis sesuatu pun, ia dapat menjawab dalam otaknya. Jumlah itu dapat dipikirkan sebagai berikut (1 + 40) + (2 + 39) + ...+ (20 + 21) = 41 + 41 + ... +41 = 20 × 41 = 820

Sumber: *Khazanah Pengetahuan Bagi Anak-Anak Matematika,* 1979

Anda dapat melihat bahwa banyak suku dari barisan tersebut adalah 10 dan 150. Kedua angka ini merupakan angka yang diperoleh dengan cara menjumlahkan suku pertama dan suku terakhir dari barisan tersebut. Dengan demikian, Anda dapat menyatakan

$$S_{10} = \frac{10(30+120)}{2} = 5(150) = 750$$

Berdasarkan uraian tersebut, Anda dapat menghitung jumlah n suku pertama (S_n) dengan cara mengalikan banyak suku (n) dengan jumlah suku pertama dan suku terakhir ($a + U_n$), kemudian membaginya dengan 2.

Cobalah

Suku ke-6 sebuah barisan aritmetika adalah 24.000 dan suku ke-10 adalah 18.000. Supaya suku ke-n sama dengan 0 maka nilai n adalah ....

Sumber: *UMPTN*, 2000

Rumus Jumlah *n* Suku Pertama dari Deret Aritmetika

Misalkan $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ merupakan deret aritmetika dengan suku pertama a dan beda b maka

$$S_n = \frac{n(a+U_n)}{2} \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)b\right)$$

Contoh Soal 3.5

Diketahui barisan 6, 17, 28, 39, ...

Tentukan :

a. rumus jumlah n suku pertama,

b. jumlah 10 suku pertamanya.

Jawab:

a.
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)b\right) = \frac{n}{2}\left(2.6+(n-1)11\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(12+11n-11\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(11n+1\right) = \frac{11}{2}n^2+\frac{1}{2}n \end{aligned}$$

Jadi, rumus umum barisan tersebut adalah $\frac{11}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

b. Jumlah 10 suku pertamanya adalah

$$S_n = \frac{11}{2}(10)^2+\frac{1}{2}(10)$$

$= 550 + 5 = 555$

Jadi, jumlah 10 suku pertamanya adalah 555.

Contoh Soal 3.6

Dari suatu deret aritmetika, diketahui $U_5 = 5$ dan $U_{10} = 15$.

Tentukan S_{20}.

Jawab:

Dari soal tersebut diketahui bahwa $U_5 = 5$ dan $U_{10} = 15$ maka

$U_5 = a + 4b = 5$ ...(1)

$U_{10} = a + 9b = 15$ ...(2)

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear (1 dan 2) tersebut, diperoleh nilai $a = –15$ dan $b = 5$ sehingga

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left(2(-15)+(20-1)5\right) = 10\ (-30 + 95) = 650$$

Jadi, besar $S_{20} = 650$

Contoh Soal 3.7

Dari suatu deret aritmetika diketahui jumlah 4 suku pertamanya sama dengan 20 dan jumlah 7 suku pertamanya sama dengan 35. Tentukan suku pertama dari deret tersebut.

Jawab:

$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$

$S_4 = \frac{4}{2}\left(2a + (4-1)b\right)$ $\quad$ $S_7 = \frac{7}{2}\left(2a + (7-1)b\right)$

$20 = 2(2a + 3b)$ $\quad$ $35 = \frac{7}{2}\left(2a + 6b\right)$

$4a + 6b = 20$ ...(1) $\quad$ $70 = 14a + 42b$

$14a + 42b = 70$

Dengan melakukan eliminasi persamaan (1) terhadap persamaan (2), diperoleh

$$\begin{array}{ll|l} 4a + 6b = 20 & |\times 7| & 28a + 42b = 140 \\ 14a + 42b = 70 & |\times 1| & 14a + 42b = 70 \quad - \\ & & 14a = 70 \\ & & a = \frac{70}{14} \\ & & = 5 \end{array}$$

Jadi, suku pertama dari deret tersebut adalah 5.

3. Aplikasi Barisan dan Deret Aritmetika

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang bisa diselesaikan dengan menggunakan konsep barisan dan deret aritmetika. Dalam menyelesaikan suatu masalah yang ada dalam keseharian kita, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mengubah masalah nyata tersebut ke dalam model matematika, setelah itu dicari solusinya. Solusi yang didapat *diinterpretasikan* kembali ke masalah nyata yang tadi dimodelkan, sehingga diperoleh penyelesaian secara nyata.

Agar dapat memahami konsep barisan dan deret aritmetika, perhatikan uraian berikut. Seorang pegawai mendapat gaji pertama Rp1.000.000,00. Setiap ia mendapatkan kenaikan gaji Rp100.000,00. Berapakah jumlah pendapatan yang diterima pegawai tersebut dalam waktu 10 bulan.

Jika Anda perhatikan, masalah tersebut sebenarnya permasalahan deret aritmetika dalam menentukan jumlah n suku pertama. Suku pertama dari deret tersebut 1.000.000 dan bedanya 100.000 dengan demikian, deret aritmetika dari masalah tersebut adalah

$1.000.000 + 1.100.000 + ... + U_{10}$

Suku ke-10 dari deret tersebut adalah

$U_{10} = a + 9b$

$= 1.000.000 + 9\ (100.000) = 1.900.000$

sehingga jumlah pendapatan yang diterima pegawai tersebut

$S_{10} = \frac{10}{2}\left(a + U_{10}\right) = 5\ (1.000.000 + 1.900.000)$

$= 5\ (2.900.000) = 14.500.000$

Jadi, jumlah pendapatan yang diterima pegawai tersebut selama kurun waktu 10 bulan adalah Rp14.500.000,00.

Pembahasan Soal

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{bmatrix}$

dan U_n adalah suku ke-n barisan aritmetika.

Jika $U_6 = 18$ dan $U_{10} = 30$, maka determinan matriks A sama dengan ....

a. –30 $\quad$ **d.** 12
b. –18 $\quad$ **e.** 18
c. –12

Jawab:

$U_{10} = 4 + 9b = 30$ ...(1)
$U_6 = 4 + 5b = 18$ ...(2) $\;-$

$4b = 12$
$b = 3$

Substitusikan $b = 3$ ke (2)

$a + 5b = 18$
$a + 5(3) = 18$
$a = 3$
$U_1 = a = 3$
$U_2 = a + b = 3 + 3 = 6$
$U_3 = a + 2b = 3 + 2(3) = 5$
$U_4 = a + 3b = 3 + 3(3) = 12$

Dengan demikian,

$A = \begin{bmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ maka

det $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

$= 36 - 54 = -18$

Jadi, det $A = -18$

Jawaban: **b**

Sumber: *UMPTN*, 1998

Contoh Soal 3.8

Sumber: *www.eba.com.hk*

Gambar 3.1 : Pabrik Tekstil

Suatu perusahaan pada tahun pertama memproduksi 3.000 unit barang. Pada tahun-tahun berikutnya, usahanya meningkat sehingga produksinya naik secara tetap sebesar 100 unit per tahun. Pada tahun ke berapakah perusahaan tersebut memproduksi 5.600 unit barang?

Jawab:

Dengan cara memodelkan permasalahan tersebut ke dalam bahasa matematika, diperoleh suku pertama 3.000 dan bedanya 100, serta U_n = 5600. Dengan demikian, yang dicari adalah n. Gunakan rumus suku ke–n, yaitu

$$U_n = a + (n-1)\,b$$
$$5600 = 3000 + (n-1)\,100$$
$$5600 = 3000 + 100\,n - 100$$
$$5600 = 2900 + 100\,n$$
$$100\,n = 5600 - 2900$$
$$100\,n = 2700$$
$$n = \frac{2700}{100} = 27$$

Jadi, perusahaan tersebut memproduksi 5600 unit barang pada tahun ke 27.

Contoh Soal 3.9

Gambar 3.2 : Keluarga

Suatu keluarga memiliki 5 orang anak. Saat ini, usia kelima anak tersebut membentuk barisan aritmetika. Jika usia anak ke-3 adalah 12 tahun dan usia anak ke-5 adalah 7 tahun, tentukan jumlah usia kelima anak tersebut.

Jawab:

Dengan memodelkan permasalahan tersebut, diperoleh

$$n = 5$$
$$U_3 = 12 = a + 2b \quad \ldots(1)$$
$$U_5 = 7 = a + 4b \quad \ldots(2)$$
$$\overline{\quad 5 = -2b \quad} -$$
$$b = -2{,}5$$

Dengan menyubstitusikan $b = -2{,}5$ ke persamaan (1), diperoleh

$$a + 2b = 12$$
$$a + 2(-2{,}5) = 12$$
$$a - 5 = 12$$
$$a = 12 + 5 = 17$$

Dengan demikian,

$$S_5 = \frac{5}{2}\big(2a + (5-1)b\big) = \frac{5}{2}\big(2\cdot 17 + 4(-2{,}5)\big) = \frac{5}{2}(34-10) = 60$$

Jadi, jumlah usia kelima anak tersebut adalah 60 tahun.

Contoh Soal 3.10

Gambar 3.3 : Uang

Ayah membagikan uang sebesar Rp100.000,00 kepada 5 orang anaknya. Semakin muda usia anak maka semakin kecil jumlah uang yang diterima anak. Jika selisih uang yang diterima oleh setiap dua anak yang usianya berdekatan adalah Rp5.000,00 dan anak sulung menerima uang paling banyak maka tentukan jumlah uang yang diterima anak ke–4.

Jawab:

Model matematika dari permasalahan tersebut adalah

S_5 = 100.000

b = 5.000

Rumus jumlah n suku pertama adalah

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a+(n-1)b\right)$$

$$S_5 = \frac{5}{2}\left(2a+(5-1)5.000\right)$$

$$100.000 = \frac{5}{2}\left(2a+4(5.000)\right)$$

$200.000 = 5(2a + 20.000)$ *kedua ruas dikalikan 2*

$200.000 = 10a + 100.000$

$10a = 100.000$

$a = 10.000$

Jumlah uang yang diterima anak ke–4

$U_4 = a + (4 – 1)b$

$U_4 = 10.000 + 3(5.000)$

$= 25.000$

Jadi, jumlah uang yang diterima anak ke-4 adalah Rp25.000,00

Tes Pemahaman 3.1

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Diketahui barisan aritmetika berikut.
   a. 3, 6, 9, 12,...
   b. 11, 17, 23, 29,...
   c. $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$
   d. 64, 60, 56, 52,...
   Dari barisan-barisan tersebut, tentukan U_7 dan U_{11}.
2. Tentukan suku ke-19 dari barisan aritmetika jika
   a. $U_4 = 15$ dan $U_9 = 75$
   b. $U_7 = 105$ dan $U_{14} = 42$
3. Diketahui suku terakhir dari suatu deret aritmetika adalah 43. Banyaknya suku dari deret tersebut adalah 22 dan jumlah deret tersebut 484. Tentukan suku pertama dan beda dari deret tersebut.
4. Suatu deret aritmetika, diketahui jumlah 5 suku yang pertama adalah 42 dan jumlah 8 suku pertama adalah 72. Tentukan suku ke–11.
5. Berapakah jumlah 10 suku yang pertama dari suku ke–n barisan aritmetika berikut.
   a. $U_n = 5n + 2$
   b. $U_n = 5 – 3n$
6. Suku ke-2 dari deret aritmetika adalah 11, jumlah suku ke-3 dan ke-4 adalah 31.
   Tentukan:
   a. suku pertama dan beda dari deret tersebut,
   b. rumus suku ke–n,
   c. jumlah 15 suku pertama dari deret tersebut.
7. Diketahui deret $U_n = 2an + b + 4$ dan $S_n = 3bn^2 + an$. Tentukan nilai a dan b yang memenuhi.
8. Sebuah gedung pertunjukan memiliki 35 baris kursi. Kursi yang terdapat di baris depan ada 25 kursi. Setiap baris, lebihnya dua kursi dari baris sebelumnya.
   Tentukan:
   a. jumlah seluruh kursi di gedung tersebut,
   b. banyaknya kursi pada baris ke–35.
9. Seorang petani apel di Malang memanen apelnya setiap hari. Setiap kali panen, ia selalu mancatat banyaknya apel yang berhasil dipanen. Banyaknya apel yang dipetik pada hari ke-n memenuhi persamaan $U_n = 50 + 15n$.

   Sumber: *www.balipost.com*

   Tentukan berapa banyaknya apel yang telah ia petik selama 20 hari pertama.
10. Pak Harry meminjam uang pada sebuah Bank untuk keperluan sekolah anaknya. Setelah dihitung, total pinjaman dan bunga yang harus dibayar oleh Pak Harry adalah Rp3.560.000,00.

    Sumber: *www.jakarta.go.id*

    Ia melakukan pembayaran utang dengan cara angsuran. Setiap bulannya, angsuran yang ia berikan naik Rp20.000,00 per bulannya. Jika angsuran pertama yang ia bayarkan Rp60.000,00, tentukan berapa lamakah waktu yang diperlukan Pak Harry untuk melunasi utangnya tersebut.

B. Barisan dan Deret Geometri

Pola dari barisan dan deret geometri tidaklah sama dengan pola dari barisan dan deret aritmetika. Untuk itu, Anda perlu berhati-hati jika menemukan suatu barisan atau deret bilangan. Supaya tidak keliru maka Anda harus bisa membedakan antara barisan dan deret aritmetika dengan barisan dan deret geometri. Untuk itu, pelajarilah materi pada subbab ini dengan baik, kemudian bandingkan dengan materi pada subbab sebelumnya.

1. Barisan Geometri

Perhatikan barisan bilangan berikut.

- 2, 4, 8, 16,...
- 81, 27, 9, 3,...

Pada kedua barisan tersebut, dapatkah Anda menentukan pola yang dimiliki oleh masing-masing barisan? Tentu saja pola yang didapat akan berbeda dengan pola yang Anda dapat ketika mempelajari barisan aritmetika. Selanjutnya, cobalah Anda bandingkan antara setiap dua suku yang berurutan pada masing-masing barisan tersebut. Apa yang Anda peroleh?

Ketika Anda membandingkan setiap dua suku yang berurutan pada barisan tersebut, Anda akan mendapatkan perbandingan yang sama. Untuk barisan yang pertama, diperoleh perbandingan sebagai berikut.

$$\frac{4}{2} = 2,\ \frac{8}{4} = 2,\ \frac{16}{8} = 2, \ldots.$$

Bilangan 2 disebut sebagai rasio dari barisan yang dilambangkan dengan r. Barisan yang memiliki rasio seperti ini dinamakan barisan geometri.

Definisi

Definisi Barisan Geometri

Misalkan $U_1, U_2, \ldots, U_n$ suatu barisan bilangan. Barisan bilangan tersebut dikatakan sebagai barisan geometri apabila memenuhi

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$, dengan r = rasio atau pembanding.

Jika diketahui suatu barisan geometri $U_1, U_2, \ldots, U_n$, dan dimisalkan $U_1 = a$ dengan rasionya r maka Anda dapat menuliskan:

$$U_1 = a$$
$$U_2 = U_1.r = a.r = ar^{2-1}$$
$$U_3 = U_2.r = (ar)\,r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$\vdots$$
$$U_n = a.\underbrace{r.r\ldots r}_{n-1} = ar^{n-1}$$

Dengan demikian, Anda dapat menentukan suatu rumus umum untuk menentukan suku ke-n dari suatu barisan geometri.

Rumus Suku ke–*n* Barisan Geometri

Misalkan terdapat suatu barisan geometri $U_1, U_2, \ldots, U_n$ maka rumus umum suku ke-n dengan suku pertamanya a dan rasionya r adalah

$$U_n = ar^{n-1}$$

Contoh Soal 3.11

Diketahui barisan geometri 2, 8, 32, ... Tentukan:

a. suku pertama dan rasionya,

b. rumus suku ke–n,

c. U_5 dan U_{11}

Jawab:

a. Suku pertama $U_1 = a = 2$. Rasionya adalah $\frac{U_2}{U_1} = \frac{8}{2} = 4$

Oleh karena $a = 2$ dan $r = 4$ maka

$U_n = ar^{n-1}$

$U_n = 2\,(4)^{n-1}$

Jadi, rumus suku ke-n barisan geometri tersebut adalah $2(4)^{n-1}$

c. Berdasarkan hasil dari soal **b** maka

$U_5 = 2\,(4)^{5-1} = 2 \cdot 4^4 = 512$ $\qquad$ $U_{11} = 2\,(4)^{11-1} = 2 \cdot 4^{10} = 2.097.152$

Jadi, U_5 dan U_{11} dari barisan tersebut adalah 512 dan 2.097.152.

Pembahasan Soal

Suku kelima dan suku kedelapan suatu barisan geometri berturut-turut adalah 48 dan 384. Suku keempat barisan tersebut adalah ....

a. 24 **d.** 38

b. 30 **e.** 42

c. 34

Jawab:

$U_5 = ar^4 = 48$

$U_8 = ar^7 = 384$

$\frac{U_8}{U_5} = \frac{ar^7}{ar^4} = \frac{384}{48}$

$r^3 = 8$

$r = \sqrt[3]{8} = 2$

$r\frac{U_5}{U_4} \Leftrightarrow U_4 = \frac{U_5}{r} = \frac{48}{2} = 24$

Jawaban: **a**

Sumber: *EBTANAS*, 2000

Contoh Soal 3.12

Diketahui suku ke-9 barisan geometri adalah 256 dan suku ke-6 barisan tersebut 32. Tentukan suku pertama dan rasio dari barisan tersebut.

Jawab:

$U_9 = ar^{9-1} = ar^8 = 256 \quad ...(1)$

$U_6 = ar^{6-1} = ar^5 = 32 \quad ...(2)$

Bagilah persamaan (1) oleh persamaan (2) diperoleh

$U_9 = ar^8 = 256$

$U_6 = ar^5 = 32$:

$r^3 = 8$

$r = 2$

Substitusi $r = 2$ ke persamaan (2), diperoleh

$ar^5 = 32$

$a\,(2)^5 = 32$

$a\,(32) = 32$

$a = 1$

Jadi, suku pertama barisan geometri tersebut adalah 1 dan rasionya 2.

Cobalah

Jika $U_1, U_2, \ldots U_7$ membentuk barisan geometri, $U_3 = 12$ dan $\log U_1 + \log U_2 + \ldots + \log U_7 = 7 \log 3$.

Tentukan U_5.

Sumber: *SPMB*, 2007

Contoh Soal 3.13

Diketahui tiga buah bilangan membentuk barisan geometri. Jika jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 31 dan hasil kali ketiga bilangan tersebut adalah 125 tentukan nilai ketiga bilangan tersebut.

Jawab:

Misalkan suku tengah dari ketiga bilangan tersebut adalah x dan rasio barisan tersebut adalah r maka suku pertama dari barisan adalah $\frac{x}{r}$ dan suku ketiganya $x.r$. Dengan demikian, barisan geometrinya adalah $\frac{x}{r}, x, xr$.

Hasil kali ketiga bilangan tersebut adalah 125,

artinya $\left(\frac{x}{r}\right)(x)(xr) = 125$

$x^3 = 125$

$x = 5$

Pembahasan Soal

Suku ke-n suatu barisan geometri adalah U_n.
Jika $U_1 = k$, $U_2 = 3k$, dan $U_3 = 8k + 4$ maka $U_5 = ...$

a. 81 d. 648
b. 162 e. 864
c. 324

Jawab:

$U_1 = k$, $U_2 = 3k$, $U_3 = 8k + 4$,
langkah pertama tentukan nilai r.

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2}$$

$$r = \frac{3k}{k} = 3$$

Selanjutnya, tentukan nilai k.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2}$$

$$\frac{3k}{k} = \frac{8k+4}{3k}$$

$$3 = \frac{8k+4}{3k}$$

$$9k = 8k + 4$$
$$k = 4$$

Oleh karena $U_1 = k$ maka $U_1 = 4$
Dengan demikian,

$$\begin{aligned} U_5 &= ar^{5-1} \\ &= ar^4 \\ &= 4 \cdot 3^4 \\ &= 4 \cdot 81 \\ &= 324 \end{aligned}$$

Jawaban: **c**

Sumber: *SPMB*, 2007

Dengan menyubstitusikan $x = 5$ ke dalam barisan, diperoleh

$$\frac{5}{r}, 5, 5r$$

Jumlah ketiga bilangan tersebut adalah 31, artinya

$$\frac{5}{r} + 5 + 5r = 31$$

$$\frac{5}{r} + 5r - 26 = 0 \qquad \textit{kedua ruas ditambah (–31)}$$

$$5 + 5r^2 - 26r = 0 \qquad \textit{kalikan dengan } r$$

$$5r^2 - 26r + 5 = 0$$

$$(r-5)(5r-1) = 0 \qquad \textit{pemfaktoran persamaan kuadrat}$$

$$r - 5 = 0 \text{ atau } 5r - 1$$

$$r = 5 \qquad r = \frac{1}{5}$$

Dengan demikian, ketiga bilangan yang dimaksud adalah

$$\frac{5}{5}; 5; 5(5) \quad \text{atau} \quad \frac{5}{\frac{1}{5}}; 5; 5\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$1; 5; 25 \qquad \text{atau} \quad 25; 5; 1$$

Jadi, ketiga bilangan tersebut adalah 1; 5; 25.

2. Deret Geometri

Seperti pada deret aritmetika, jika Anda menjumlahkan barisan geometri maka Anda akan memperoleh deret geometri.

Definisi

Definisi Deret Geometri
Misalkan $U_1, U_2, ..., U_n$ adalah barisan geometri maka pemjumlahan $U_1 + U_2 + ... + U_n$ adalah deret geometri.

Secara umum, dari suatu barisan geometri $U_1, U_2, ..., U_n$ dengan $U_1 = a$ dan rasio r, Anda dapat memperoleh bentuk umum deret geometri, yaitu $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

Seperti pada deret aritmetika, pada deret geometri pun Anda akan memperoleh jumlah deret geometri. Jika S_n menyatakan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri maka Anda peroleh

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \qquad ...(1)$$

Untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama deret geometri, kalikanlah persamaan (1) dengan r, diperoleh

$$S_n \cdot r = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \qquad ...(2)$$

Selanjutnya, cari selisih dari persamaan (1) dan persamaan (2). Dalam hal ini, $S_n - (S_n \cdot r)$.

$$\begin{aligned} S_n &= a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + ... + \cancel{ar^{n-1}} \\ (S_n \cdot r) &= \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + ... + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n \quad - \\ \hline S_n - (S_n \cdot r) &= a - ar^n \\ S_n(1-r) &= a(1-r^n) \qquad \textit{faktorkan masing-masing ruas} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $S_n = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}, r \neq 1$

Rumus Jumlah *n* Suku Pertama dari Deret Geometri

Misalkan U_1, $U_2 + ... + U_n$ merupakan deret geometri, dengan suku pertama a dan rasio r, maka jumlah n suku pertama (S_n) dari deret tersebut adalah

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}, r \neq 1 \text{ atau } S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}, r \neq 1$$

Contoh Soal 3.14

Diketahui deret 4 + 12 + 36 + 108 ....

Tentukan:

a. rumus jumlah n suku pertama,

b. jumlah 7 suku pertamanya.

Jawab:

4 + 12 + 36 + 108 ....

Dari deret tersebut diketahui $a = 4$ dan $r = \frac{12}{4} = 3$

a. $S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{4\left(3^n-1\right)}{3-1} = \frac{4\left(3^n-1\right)}{2} = 2(3^n - 1)$

Jadi, rumus umum jumlah n suku pertama deret tersebut adalah $2\ (3^n - 1)$.

b. Jumlah suku pertamanya

$S_7 = 2\ (3^7 - 1)$

$= 2\ (2187 - 1) = 4.372$

Jadi, jumlah 7 suku pertamanya adalah 4.372.

Contoh Soal 3.15

Dari suatu deret geometri, diketahui suku ke-3 = 8 dan suku ke-5 = 32. Tentukan S_{15}.

Jawab:

Dari soal diketahui

$U_3 = 8 = ar^2$ ...(1)

$U_5 = 32 = ar^4$ ...(2)

Dari persamaan (1) dan (2), Anda peroleh $r = 2$ dan $a = 2$ (buktikan), sehingga

$$S_{15} = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{2\left(2^{15}-1\right)}{2-1} = \frac{2\left(32.768-1\right)}{1} = 2\ (32.767) = 65.534$$

Jadi, besar $S_{15} = 65.534$.

Contoh Soal 3.16

Diketahui jumlah n suku pertama pada suatu deret geometri adalah 68.887. Jika suku pertama dari deret itu $a = 7$ dan rasio $r = 3$ maka tentukanlah nilai n.

Jawab:

$a = 7$ dan $r = 3$

$S_n = 68887$

$$S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

Pembahasan Soal

Jika jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri yang rasionya r adalah S_n maka $\frac{S_{6n}}{S_{3n}}$ = ...

a. r^{3n}

b. r^{2n}

c. $r^{3n} + 1$

d. $r^{2n} + 1$

e. $r^{3n} - 1$

Jawab:

$S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$ maka

$$\frac{S_{6n}}{S_{3n}} = \frac{\frac{a\left(r^{6n}-1\right)}{r-1}}{\frac{a\left(r^{3n}-1\right)}{r-1}} = \frac{r^{6n}-1}{r^{3n}-1}$$

$$\frac{S_{6n}}{S_{3n}} = \frac{\left(r^{3n}\right)^2-1}{r^{3n}-1}$$

$$= \frac{\left(r^{3n}-1\right)\left(r^{3n}+1\right)}{r^{3n}-1}$$

$$\frac{S_{6n}}{S_{3n}} = r^{3n} + 1$$

Jadi, nilai $\frac{S_{6n}}{S_{3n}} = r^{3n} + 1$

Jawaban: **c**

Sumber: *SPMB*, 2004

$$68.887 = \frac{7\left(3^n - 1\right)}{3 - 1}$$
$137.774 = 7\ (3^n - 1)$
$3^n - 1 = 19.682$
$3^n = 19.683$
$3^n = 3^9$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 9.

3. Deret Geometri Tak Hingga

Pembahasan Soal

Pada matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}$, bilangan positif 1, a, c membentuk barisan geometri berjumlah 13 dan bilangan positif 1, b, c membentuk barisan aritmetika, maka det A = ...

a. 17 **d.** –6
b. 6 **e.** –22
c. –1

Jawab:

1, a, c membentuk barisan geometri berjumlah 13 maka

$\frac{a}{1} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = c$ ...(1)

dan

$1 + a + c = 13 \Leftrightarrow c + a = 12$ ...(2)

Substitusi (1) ke (2) diperoleh

$a^2 + a - 12 = 0$
$(a - 3)(a + 4) = 0$
$a - 3$ atau $a + 4 = 0$
$a = 3$ $a = -4$ (tidak memenuhi karena $a > 0$)

1, b, c membentuk barisan aritmetika maka

$b - 1 = c - b$
$2b = c + 1$
$b = \frac{1}{2}(c + 1)$ ...(3)

Substitusi $a = 3$ ke (1) diperoleh
$c = a^2 = 3^2 = 9$,
substitusi $c = 9$ ke (3)

$b = \frac{1}{2}(c + 1) = \frac{1}{2}(9 + 1) = 5$

Dengan demikian,

$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

maka det $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6$

Jadi, det $A = -6$

Jawaban: **d**

Sumber: *SPMB*, 2007

Pada **Subbab B.2**, Anda telah mempelajari deret geometri. Deret geometri yang telah Anda pelajari merupakan deret geometri berhingga. Pada bagian ini, Anda akan mempelajari deret geometri tak hingga.

Deret geometri tak hingga merupakan deret geometri yang banyak sukunya tak hingga. Anda telah mengetahui bahwa untuk menentukan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri digunakan rumus:

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

Oleh karena yang dipelajari adalah deret geometri tak hingga maka akan ditinjau setiap nilai dari r untuk $n \to \infty$ sebagai berikut.

a. Untuk $r > 1$ atau $r < -1$

Oleh karena $r > 1$ atau $r < -1$ maka nilai r^n akan semakin besar jika n makin besar. Dalam hal ini,

- Untuk $r > 1$ dan n $\to \infty$ maka $r^n \to \infty$.
- Untuk $r < -1$ dan $n \to \infty$ maka $r \to -\infty$.

  sehingga diperoleh

$$S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{a\left(\pm\infty\right)}{1 - r} = \pm\infty$$

Deret geometri tak hingga dengan $r > 1$ atau $r < -1$ disebut *deret divergen* (menyebar) karena deret ini tidak memiliki kecenderungan pada suatu nilai tertentu. Oleh karena itu, deret ini tidak memiliki limit jumlah.

b. Untuk $-1 < r < 1$

Oleh karena $-1 < r < 1$ maka nilai r^n akan semakin kecil dan mendekati nol. Dalam hal ini untuk $n \to \infty$ maka $r^n \to 0$
sehingga diperoleh

$$S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{a\left(0\right)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

Deret geometri tak hingga dengan $-1 < r < 1$ disebut *deret konvergen*. Deret ini memiliki kecenderungan pada suatu nilai tertentu. Oleh karena itu, deret ini memiliki limit jumlah.

Contoh Soal 3.17

Tentukan jumlah deret geometri tak hingga berikut.

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$$

Jawab:

Berdasarkan deret tersebut dapat Anda ketahui $a = 2$ dan $r = \frac{1}{3}$. Dengan demikian,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

Jadi, jumlah deret geometri tersebut adalah 3.

Contoh Soal 3.18

Suku ke-n dari suatu deret geometri tak hingga adalah 5^{-n}. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga tersebut.

Jawab:

$U_n = 5^{-n}$ maka $a = U_1 = 5^{-1} = \frac{1}{5}$, $U_2 = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}\times\frac{5}{1} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\times\frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

Jadi, jumlah deret tersebut adalah $\frac{1}{4}$.

Contoh Soal 3.19

Dengan menggunakan konsep deret geometri tak hingga, nyatakan pecahan desimal 0,2222... ke dalam bentuk pecahan biasa.

Jawab:

$$\begin{aligned} 0{,}2222\ldots &= 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots \\ &= 0{,}2 + 0{,}2\,(0{,}1) + 0{,}2\,(0{,}01) + \ldots \\ &= 0{,}2 + 0{,}2\,(0{,}1) + 0{,}2\,(0{,}1)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Ternyata bentuk 0,2222... dapat dibentuk ke dalam bentuk deret geometri tak hingga dengan suku pertama $a = 0{,}2$ dan rasio $r = 0{,}1$. Oleh karena $r = 0{,}1$ $(-1 < r < 1)$ maka deret ini *konvergen* dengan:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}2}{1-0{,}1} = \frac{0{,}2}{0{,}9} = \frac{2}{9}$$

Jadi, bentuk desimal 0,2222... ekuivalen dengan pecahan $\frac{2}{9}$.

Pembahasan Soal

Jumlah deret tak hingga $1 - \tan^2 30° + \tan^4 30° - \tan^6 30° + \ldots + (-1)^n \tan^{2n} 30°$ adalah ....

a. 1

b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{3}{2}$

e. 2

Jawab:

$1 - \tan^2 30° + \tan^4 30° - \tan^6 30° + \ldots + (-1)^n \tan^{2n} 30° + \ldots$

Berdasarkan deret tersebut, diketahui:

$a = 1$

$r = -\tan^2 30°$

Jumlah deret tak hingganya

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1+\tan^2 30°} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Jadi, jumlah deret tak hingga tersebut adalah $\frac{3}{4}$

Jawaban: **c**

Sumber: *UMPTN*, 1999

Contoh Soal 3.20

Suatu deret geometri tak hingga *konvergen* dengan limit jumlah 9. Jika suku pertama deret tersebut adalah 6, tentukan rasio dari deret tersebut.
Dari soal diketahui bahwa a = 6 dan S_∞ = 9.

Jawab:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$9 = \frac{6}{1-r}$$

$$9 - 9r = 6$$

$$9r = 3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Jadi, rasio dari deret geometri tersebut adalah $\frac{1}{3}$.

4. Aplikasi Barisan dan Deret Geometri

Sama halnya seperti barisan dan deret aritmetika, barisan dan deret geometri pun dapat digunakan dalam memecahkan masalah-masalah yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Sumber: *www.iptekda.lipi.go.id*

Gambar 3.4 : Peternakan ayam

Contoh Soal 3.21

Akibat adanya wabah flu burung, seorang peternak ayam mengalami kerugian. Setiap dua puluh hari, jumlah ayamnya berkurang menjadi setengah. Jika setelah 2 bulan jumlah ayam yang tersisa tinggal 200 ekor, berapakah jumlah ayam semula yang dimiliki peternak tersebut?

Jawab:

Masalah tersebut merupakan aplikasi dari barisan geometri. Dari permasalahan tersebut diketahui

$U_n = 200$, $r = \frac{1}{2}$, dan $n = \frac{2 \text{ bulan}}{20 \text{ hari}} = \frac{2 \times 30 \text{ hari}}{20 \text{ hari}} = 3$

Berdasarkan konsep barisan geometri, diperoleh

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$200 = a\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$200 = a\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$a = 4 \times 200$$

$$= 800$$

Jadi, jumlah ayam yang dimiliki peternak tersebut adalah 800 ekor.

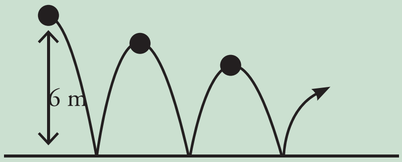
Sumber: *www.ldb.com.do*

Gambar 3.5 : Bola basket

Contoh Soal 3.22

Sebuah bola basket dijatuhkan dari ketinggian 6 m. Pada setiap pantulan, bola memantul dan mencapai ketinggian $\frac{2}{3}$ dari ketinggian semula. Tentukan panjang lintasan yang terjadi hingga bola benar-benar berhenti.

Jawab:



Panjang lintasan total bola hingga berhenti dinyatakan oleh deret berikut.

$S_\infty = h_0 + 2(h_1 + h_2 + ...)$

h_o = ketinggian mula-mula 6 m

$h_1 = \frac{2}{3} h_0 = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ m

$h_2 = \frac{2}{3} h_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) h_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 h_0 = \frac{4}{9} \times 6 = \frac{24}{9}$ m

$h_3 = \frac{2}{3} h_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 h_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 h_0 = \frac{8}{27}$ m

$h_n = \frac{2}{3} h_{n-1}$

Dengan demikian, Anda dapat menuliskan

$$S_\infty = h_0 + 2(h_1 + h_2 + ... + h_{50}) = 6 + 2\left(\frac{2}{3}(6) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (6) + ...\right)$$

$$= 6 + 2\left(4 + \left(\frac{2}{3}\right)4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 4 + ...\right)$$

Dapat Anda lihat bahwa

$$4 + \left(\frac{2}{3}\right)4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 4 + ...$$

merupakan deret geometri tak hingga konvergen dengan $a = 4$ dan $r = \frac{2}{3}$. Oleh karena itu, jumlah dari deret tersebut (misalkan D) adalah

$$D = \frac{a}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$$

Dengan demikian,

$S_\infty = 6 + 2D$

$= 6 + 2\,(12)$

$= 6 + 24 = 30$

Jadi, panjang lintasan yang dilalui bola sampai bola berhenti adalah 30 m.

Contoh Soal 3.23

Seutas tali dipotong menjadi 4 bagian, sedemikian sehingga panjang dari potongan tali tersebut membentuk barisan geometri. Jika potongan tali yang terpendek adalah 0,5 cm dan yang paling panjang 108 cm, tentukan panjang tali semula.

Jawab:

Dengan memodelkan masalah tersebut ke dalam bahasa matematika, $n = 4$, $U_1 = a = 0{,}5$ cm, dan $U_4 = 108$ cm.

$U_4 = ar^{4-1} = 108$

$0{,}5r^3 = 108$

$r^3 = 216$

$r = 6$

Sumber: *www.ropefailed.com*

Gambar 3.6
Tali putus

Selanjutnya, carilah jumlah dari potongan-potongan tali tersebut, yaitu S_4

$$S_4 = \frac{a\left(r^4-1\right)}{r-1}$$
$$= \frac{0,5\left(6^4-1\right)}{6-1}$$
$$= \frac{0,5\left(1296-1\right)}{5}$$
$$= 0,1\ (1295)$$
$$= 129,5$$

Jadi, panjang tali semula adalah 129,5 cm.

Tes Pemahaman 3.2

Kerjakanlah soal-soal berikut di buku latihan Anda.

1. Tentukan rasio dan suku ke-5 dari barisan-barisan geometri berikut ini.
   a. 2, –6, 18, –54, ...
   b. 9, 3, 1, ...

2. Tentukan suhu ke 6 dan suhu ke 9 dari barisan-barisan geometri berikut.
   a. –44, 22, –11, ...
   b. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

3. Diketahui suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 5, sedangkan suku keduanya adalah 12. Tentukan rasio dan rumus suku umum ke-n dari barisan geometri tersebut.

4. Diketahui deret geometri $4 + 2 + 1 + \ldots + \frac{1}{108}$.
Tentukan:
   a. banyak suku deret tersebut,
   b. jumlah 7 suku pertama,
   c. jumlah deret tersebut.

5. Tentukan jumlah dari deret geometri tak hingga berikut.
   a. –2, 4, –8, 16, ...
   b. $\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots$

6. Suku pertama dari suatu barisan sama dengan 5, sedangkan suku ketiganya sama dengan 80. Tentukan:
   a. rasio dari barisan (ambil rasio yang positif),
   b. rumus suku ke-n.

7. Pada saat awal diamati terdapat 8 virus jenis tertentu. Setiap 24 jam masing-masing virus membelah diri menjadi dua. Jika setiap 96 jam seperempat dari seluruh virus dibunuh, tentukan banyaknya virus pada hari ke-6.

8. Seutas tali dipotong menjadi 6 bagian dan panjang masing-masing potongan membentuk barisan geometri. Panjang potongan tali terpendek 6 cm dan potongan tali terpanjang sama dengan 486 cm. Tentukan panjang tali secara keseluruhan.

9. Diketahui suku ke-5 dari deret geometri adalah 96 dan suku ke-3 dari deret tersebut adalah 24.
Jika $S_4 = 90$, tentukan nilai a (suku pertama).

10. Sebuah bola pingpong dijatuhkan dari ketinggian 4 m, dan ketinggian bola setiap kali memantul adalah $\frac{3}{4}$ dari ketinggian semula. Tentukan:
   a. ketinggian bola pada pantulan ke-4,
   b. panjang lintasan bola sampai bola benar-benar berhenti.

Rangkuman

1. Barisan Aritmetika
Suatu barisan dikatakan sebagi barisan aritmetika jika selisih antara setiap dua suku yang berurutan selalu tetap. Bilangan (selisih) tetap tersebut disebut sebagai beda (b).
Rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmetika:
$U_n = a + (n - 1)b$

2. Deret Aritmetika
Misalkan $U_1, U_2, \ldots U_n$ adalah barisan aritmetika maka penjumlahan $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ adalah deret aritmetika.
Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika

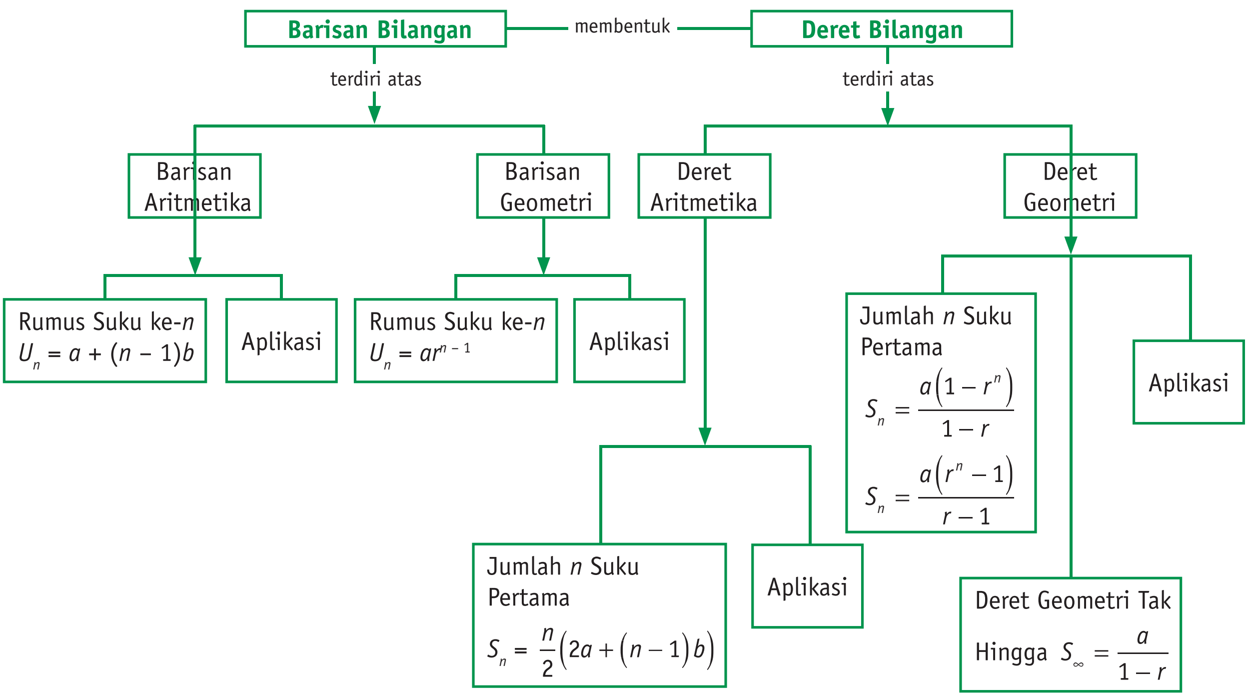
$$S_n = \frac{n\left(a+U_n\right)}{2} \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}\left(2a+\left(n-1\right)b\right)$$

3. **Barisan Geometri**
$U_1, U_2, \ldots, U_n$ suatu barisan bilangan geometri apabila memenuhi
$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r$, dengan r = rasio atau pembanding.

4. **Deret Geometri**
$U_1, U_2, \ldots, U_n$ adalah barisan geometri maka penjumlahan $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ adalah deret geometri.
$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, dengan $r \neq 1$

5. **Deret Geometri Tak Hingga**
   a. Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang banyak sukunya tak hingga.
   b. Deret geometri tak hingga dengan $r > 1$ atau $r < -1$ adalah *deret divergen*. Deret ini tidak memiliki limit jumlah.
   c. Deret geometri tak hingga dengan $-1 < r < 1$ adalah deret konvergen. Deret ini memiliki limit jumlah dengan rumus
   $S_n = \frac{a}{1-r}$, $r \neq 1$

Peta Konsep



Tes Pemahaman Bab 3

Kerjakanlah di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Suku ke-6 dari barisan aritmetika 2, 5, 8, ...
   a. 11
   b. 14
   c. 17
   d. 20
   e. 23
2. Jumlah 15 bilangan asli yang pertama adalah ....
   a. 120
   b. 121
   c. 122
   d. 123
   e. 124
3. Jumlah 6 suku pertama pada barisan bilangan 3, 8, 13, 18, ... adalah ....
   a. 47
   b. 65
   c. 72
   d. 84
   e. 95
4. $U_5 + U_7$ pada barisan bilangan 3, 6, 9, ... adalah ....
   a. 33
   b. 36
   c. 39
   d. 42
   e. 45
5. Diketahui barisan bilangan 3, 7, 11, 15, ... adalah .... Jika $S_n = 528$, maka n = ...
   a. 10
   b. 12
   c. 14
   d. 16
   e. 18
6. Jumlah semua bilangan genap antara 100 dan 200 yang habis dibagi 5 adalah ....
   a. 1150
   b. 1250
   c. 1350
   d. 1450
   e. 1500
7. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah
   $S_n = \frac{n}{2}(3n-17)$.
   Rumus suku ke-n deret ini adalah ....
   a. $3n - 10$
   b. $3n - 8$
   c. $3n - 6$
   d. $3n - 4$
   e. $3n - 2$
8. Jumlah 6 suku pertama pada barisan bilangan 2, 6, 18, 54, adalah ....
   a. 728
   b. 726
   c. 724
   d. 722
   e. 720
9. $U_7 + U_5$ pada barisan bilangan 3, 6, 12, 24, ... adalah ....
   a. 236
   b. 238
   c. 240
   d. 242
   e. 244
10. Pada suatu deret geometri suku keduanya 5, jumlah suku keempat dan keenam adalah 28. Suku ke-9 dari deret tersebut adalah ....
    a. 28
    b. 26
    c. 21
    d. 19
    e. 17
11. Sebuah tali dibagi menjadi enam bagian dengan panjang yang membentuk barisan geometri. Jika tali yang paling pendek panjangnya 3 cm dan yang paling panjang 96 cm, panjang tali semula adalah ....
    a. 183 cm
    b. 186 cm
    c. 187 cm
    d. 189 cm
    e. 191 cm
12. Jika a, b, dan c barisan geometri, hubungan yang mungkin adalah ....
    a. $a^2 = bc$
    b. $b^2 = ac$
    c. $c^2 = ab$
    d. $c = a^2b$
    e. $b = a^2r^2$
13. Jumlah dari suatu deret tak hingga adalah 10. Jika suku pertamanya 2, rasio dari deret tersebut adalah ....
    a. $\frac{2}{3}$
    b. $\frac{3}{4}$
    c. $\frac{4}{5}$
    d. $\frac{5}{6}$
    e. $\frac{6}{7}$
14. Suatu jenis bakteri dalam satu detik membelah menjadi dua. Jika pada permulaan ada 5 bakteri maka banyaknya waktu yang diperlukan supaya bakteri yang ada menjadi 160 adalah ....
    a. 3 detik
    b. 4 detik
    c. 5 detik
    d. 6 detik
    e. 7 detik
15. Seorang petani mencatat hasil panennya selama 11 hari. Jika hasil panen hari pertama 15 kg mengalami kenaikan sebesar 2 kg setiap hari, jumlah hasil panen yang dicatat adalah .... (**SPMB 2003**)
    a. 200 kg
    b. 235 kg
    c. 325 kg
    d. 275 kg
    e. 425 kg

16. Syarat supaya deret geometri tak hingga dengan suku pertama *a konvergen* dengan jumlah 2 adalah ....
   a. $-2 < a < 0$
   b. $-4 < a < 0$
   c. $0 < a < 2$
   d. $0 < a < 4$
   e. $-4 < a < 4$
17. Dari suatu barisan geometri, ditentukan $U_1 + U_2 + U_3 = 9$ dan $U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 = -216$. Nilai U_3 pada barisan geometri itu adalah ....
   a. –12 atau –24
   b. –6 atau –12
   c. –3 atau –6
   d. –3 atau –12
   e. 6 atau 24
18. μ_1, μ_2, μ_3, ... adalah barisan aritmetika dengan suku-suku positif. Jika $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 24$ dan $\mu_1^{\ 2} = \mu_3 - 10$ maka $\mu_4 =$ ....
   a. 16
   b. 20
   c. 24
   d. 30
   e. 32
19. Dari deret aritmetika diketahui
   $U_6 + U_9 + U_{12} + U_{15} = 20$ maka $S_{20} =$ ....
   a. 50
   b. 80
   c. 100
   d. 200
   e. 400
20. Jumlah 5 suku pertama suatu deret aritmetika adalah 20. Hasil kali suku ke-2, suku ke-4, dan suku ke-5 adalah 324. Jumlah 8 suku pertama deret tersebut adalah ....
   a. –4 atau 68
   b. –52 atau 116
   c. –64 atau 88
   d. –64 atau 124
   e. –5 atau 138

II. Kerjakan soal-soal berikut.

1. Diketahui suku ke-2 dari suatu deret aritmetika adalah 5. Jika jumlah suku ke-4 dan ke-6 sama dengan 28, tentukan
   a. suku pertama dan beda deret aritmetika tersebut,
   b. rumus suku ke-*n*,
   c. jumlah 15 suku pertama.
2. Jumlah 5 suku pertama sebuah deret geometri adalah 33. Jika rasionya -2, tentukan jumlah nilai suku ke-5 dan ke-9 deret geometri tersebut.
3. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 2 dan suku kedua dikurangi 2 maka diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 2 maka hasilnya menjadi 4 kali suku pertama.
   Tentukan beda barisan aritmetika tersebut.
4. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Jika keuntungan sampai bulan keempat Rp30.000,00, dan sampai bulan kedelapan Rp172.000,00, tentukan keuntungan yang diperoleh pedagang tersebut sampai tepat 1 tahun.
5. Jumlah penduduk sebuah kota setiap 10 tahun berubah menjadi 2 kali lipatnya. Berdasarkan perhitungan, pada tahun 2020 nanti akan dicapai 6,4 juta orang.
   Tentukan berapakah jumlah penduduk kota tersebut pada tahun 1980.

Refleksi Akhir Bab

Berilah tanda √ pada kolom yang sesuai dengan pemahaman Anda mengenai isi bab ini. Setelah mengisinya, Anda akan mengetahui pemahaman Anda mengenai isi bab yang telah dipelajari.

No	Pertanyaan	Jawaban			
		Tidak	Sebagian Kecil	Sebagian Besar	Seluruhnya
1.	Apakah Anda memahami pengertian dan sifat-sifat notasi sigma?				
2.	Apakah Anda dapat menjelaskan ciri barisan aritmetika dan baris geometri?				
3.	Apakah Anda memahami cara merumuskan dan menentukan suku ke–n dan jumlah n suku deret aritmetika dan deret geometri?				
4.	Apakah Anda dapat menjelaskan ciri deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah?				
5.	Apakah Anda memahami cara menghitung jumlah deret geometri tak hingga?				
6.	Apakah Anda memahami cara menuliskan suatu deret aritmetika dan deret geometri dengan notasi sigma?				
7.	Apakah Anda dapat merumuskan masalah yang model matematikannya berbentuk deret aritmetika dan deret geometri?				
8.	Apakah Anda memahami cara menentukan bunga tunggal, bunga majemuk, dan anuitas?				
9.	Apakah Anda mengerjakan soal-soal yang ada pada bab ini?				
10.	Apakah Anda berdiskusi dengan teman-teman Anda apabila ada materi yang tidak dimengerti?				

Evaluasi Semester 2

Kerjakanlah di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Diketahui barisan bilangan 4, 9, 14, 19, ... Suku ke-9 dari barisan tersebut adalah ....
   a. 34 d. 49
   b. 39 e. 54
   c. 44
2. Rumus suku ke-n dari barisan bilangan pada soal nomo 1 adalah ....
   a. $2n + 2$ d. $5n - 1$
   b. $n + 2$ e. $3n + 2$
   c. $3n + 1$
3. Jumlah suku ke-n dari suatu barisan bilangan adalah $U_n = 4n + 3$. Suku ke-15 dan suku ke-18 dari barisan tersebut berturut-turut adalah ....
   a. 63 dan 72 d. 65 dan 72
   b. 60 dan 72 e. 63 dan 75
   c. 60 dan 75
4. Diketahui suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 5 - 2n$. Jumlah 15 suku pertama dari barisan tersebut adalah ....
   a. –330 d. –330
   b. –165 e. 495
   c. 165
5. Diketahui suku kelima dari suatu barisan aritmetika adalah 21 dan suku kesepuluh 41. Suku kelima puluh barisan aritmetika tersebut adalah ....
   a. 197 d. 200
   b. 198 e. 201
   c. 199
6. Diketahui suatu deret aritmetika 84, $80\frac{1}{2}$, ... Suku ke-n akan menjadi nol, jika n = ...
   a. 20 d. 100
   b. 24 e. ~
   c. 25
7. Diketahui 3 suku yang berurutan dari suatu barisan aritmetika adalah $x + 2$, $2x + 3$, $5x - 6$ maka x = ...
   a. –1 d. $\frac{5}{4}$
   b. 0 e. 5
   c. 1
8. Pada suatu barisan aritmetika, suku keduanya adalah 8, suku keempatnya adalah 14, dan suku terakhirnya adalah 23. Banyaknya suku pada barisan itu adalah ....
   a. 5 d. 8
   b. 6 e. 9
   c. 7
9. Suku kedua dari suatu deret aritmetika adalah 5. Jika jumlah suku ke-4 dan ke-6 sama dengan 28, suku ke-9 adalah ....
   a. 19 d. 26
   b. 21 e. 28
   c. 23
10. Jika jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah $S_n = 2n^2 + 3n$, beda deretnya adalah ....
    a. 2 d. 5
    b. 3 e. 6
    c. 4
11. Jumlah n bilangan bulat positif pertama sama dengan ....
    a. $n(n - 1)$ d. $\frac{n(n+1)}{2}$
    b. $\frac{n(n-1)}{2}$ e. n^2
    c. $n(n + 1)$
12. Ayah membagikan uang sebesar Rp100.000,00 kepada 4 orang anaknya. Semakin muda usia anak, semakin kecil uang yang diterima. Jika selisih yang diterima oleh setiap dua anak yang usianya berdekatan adalah Rp5.000,00 dan si sulung menerima uang paling banyak maka jumlah yang diterima oleh si bungsu adalah ....
    a. Rp15.000,00 d. Rp22.500,00
    b. Rp17.500,00 e. Rp25.000,00
    c. Rp20.000,00
13. Jika $(a + 2)$, $(a - 1)$, $(a - 7)$, ... membentuk barisan geometri, rasionya sama dengan ....
    a. –5 d. $\frac{1}{2}$
    b. –2 e. 2
    c. $-\frac{1}{2}$
14. Dari suatu barisan geometri, diketahui suku ke-2 adalah $\frac{4}{3}$ dan suku ke-5 adalah 36. Suku ke-6 barisan tersebut adalah ....
    a. 108 d. 45
    b. 54 e. 40
    c. 48
15. Diketahui barisan geometri dengan suku pertama = 4 dan suku kelima = 324. Jumlah delapan suku pertama deret tersebut adalah ....
    a. 6.560 d. 13.122
    b. 6.562 e. 13.124
    c. 13.120

16. Diketahui deret geometri

$$8 + \frac{16}{3} + \frac{32}{9} + \ldots.$$

Jumlah tak hingga dari deret tersebut adalah ....

a. 48
b. 24
c. 19,2
d. 18
e. 16,9

17. Suku pertama dan suku ke dua suatu deret geometri berturut-turut adalah a^{-4} dan a^{x}. Jika suku kedelapan adalah a^{52} maka x sama dengan ....

a. –32
b. –16
c. 12
d. 8
e. 4

18. Tiga buah bilangan merupakan deret geometri yang jumlahnya 26. Jika suku tengah ditambah 4 maka terjadi deret aritmetika. Suku tengah dari deret geometri tersebut adalah ....

a. 2
b. 4
c. 6
d. 10
e. 18

19. Seseorang berjalan lurus dengan kecepatan tetap 4 km/jam selama jam pertama. Pada jam kedua, kecepatan dikurangi setengahnya, demikian seterusnya. Setiap jam kecepatannya menjadi setengah dari kecepatan sebelumnya. Jarak terjauh yang dapat dicapai orang tersebut adalah ....

a. 6 km
b. 8 km
c. 10 km
d. 12 km
e. tak berhingga

20. Jika pada suatu deret aritmetika suku ke-7 dan suku ke-10 berturut-turut 13 dan 19 maka jumlah 20 suku pertama adalah ....

a. 100
b. 200
c. 300
d. 400
e. 500

21. Jumlah penduduk sebuah kota setiap 10 tahun menjadi 2 kali lipat. Menurut perhitungan, pada tahun 2000 akan mencapai 3,2 juta orang. Ini berarti bahwa pada tahun 1950 jumlah penduduk kota itu baru mencapai ....

a. 100 ribu orang
b. 120 ribu orang
c. 160 ribu orang
d. 200 ribu orang
e. 400 ribu orang

22. Jika jumlah tak hingga deret

$$a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots$$

adalah $4a$ maka nilai a = ...

a. $\frac{4}{3}$
b. $\frac{3}{2}$
c. 2
d. $3\frac{1}{2}$
e. $4\frac{1}{2}$

23. Ani membelanjakan $\frac{1}{5}$ bagian dari uang yang masih dimilikinya dan tidak memperoleh pemasukan uang lagi. Jika sisa uang Ani kurang dari $\frac{1}{3}$, berarti Ani paling sedikit sudah belanja ....

a. 4 kali
b. 5 kali
c. 6 kali
d. 7 kali
e. 8 kali

24. Suku ke-n suatu deret geometri adalah 4^{-n}. Jumlah tak berhingga deret tersebut sama dengan ....

a. 3
b. 2
c. 1
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{1}{3}$

25. Agar deret bilangan $\frac{x-1}{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x(x-1)}, \ldots$ jumlahnya mempunyai limit, nilai x harus memenuhi ....

a. $x > 0$
b. $x < 1$
c. $0 < x < 1$ atau $x > 1$
d. $x > 2$
e. $0 < x < 1$ atau $x > 2$

II. Kerjakan soal-soal berikut.

26. Diketahui suku kedua dari suatu deret matematika adalah 5. Jika jumlah suku ke-4 dan ke-6 sama dengan 28, tentukan:
   a. suku pertama dan beda deret tersebut,
   b. suku ke-11,
   c. jumlah delapan suku pertama.

27. Jika suku ke-5 dan suku ke-8 suatu barisan geometri masing-masing adalah 48 dan 384, tentukan rasio dan suku ke-13 dari barisan tersebut.

28. Nyatakan bentuk pecahan-pecahan berulang berikut dalam bentuk pecahan biasa.
   a. 0,111 ...
   b. 0,1212 ...

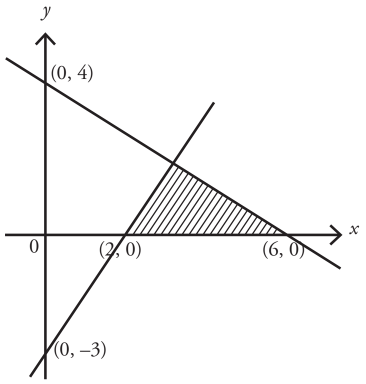
29. Hasil produksi suatu *home industri* per tahun sesuai dengan aturan barisan aritmetika. Pada tahun pertama dihasilkan 500 unit dan pada tahun keempat sebanyak 740 unit. Tentukan pertambahan produksi setiap tahunnya, dan tentukan pula banyak produksi pada tahun kesepuluh.

30. Sepotong kawat memiliki panjang 105,5 cm. Kawat tersebut dipotong menjadi 5 bagian sehingga panjang potongan-potongannya membentuk barisan geometri. Jika panjang potongan kawat yang paling pendek 8 cm, tentukan panjang potongan kawat yang paling panjang.

Evaluasi Akhir Tahun

Kerjakanlah di buku latihan Anda.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. 

Daerah diarsir pada gambar di atas adalah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan ....

a. $2x + 3y \le 12, -3x + 2y \ge -6, x \ge 0, y \ge 0$
b. $2x + 3y \le 12, -3x + 2y \le -6, x \ge 0, y \ge 0$
c. $2x + 3y \ge 12, -3x + 2y \ge -6, x \ge 0, y \ge 0$
d. $2x + 3y \ge 12, 3x - 2y \ge 6, x \ge 0, y \ge 0$
e. $-2x + 3y \le 12, 3x + 2y \le -6, x \ge 0, y \ge 0$

2. Harga satu bakso super Rp2.000,00 dan bakso biasa Rp1.000,00. Jika pedagang hanya memiliki modal Rp200.000,00 dan gerobaknya hanya mampu menampung 150 bakso maka model matematika dari permasalahan di atas adalah ....

a. $x + y \ge 150, 2x + y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$
b. $x + y \le 150, 2x + y \le 200, x \ge 0, y \ge 0$
c. $x + y \le 150, 2x + y \le 200, x \le 0, y \le 0$
d. $x + y \ge 150, 2x + y \ge 200, x \le 0, y \le 0$
e. $x + y \le 150, 2x + 2y \ge 200, x \ge 0, y \ge 0$

3. Nilai maksimum dari fungsi tujuan $z = 3x + 4y$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan

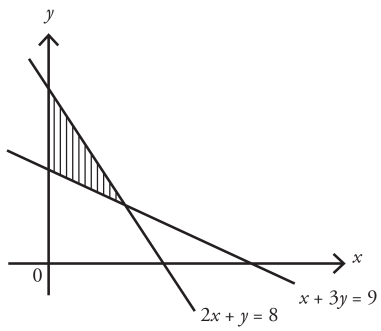
$2x + y \le 11$
$x + 2y \le 10$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

adalah ....

a. 36 **d.** 27
b. 32 **e.** 24
c. 30

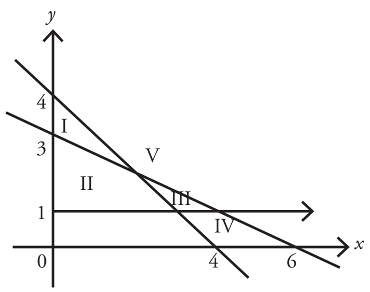
4. Nilai maksimum dari $x + y - 6$ yang memenuhi syarat $x \ge 0$, $y \ge 0$, $3x + 8y \le 340$, dan $7x + 4y \le 280$ adalah ....

a. 52 **d.** 45
b. 51 **e.** 48
c. 50

5. 

Nilai maksimum fungsi tujuan $f(x, y) = 2x + 5y$ pada daerah yang diarsir dari gambar di atas adalah ....

a. 15
b. 16
c. 25
d. 36
e. 40

6. 

Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan

$x + y \le 4$
$x + 2y \le 6$
$y \ge 1$

ditunjukkan oleh ....

a. I **d.** IV
b. II **e.** V
c. III

7. Nilai minimum dari bentuk $4x + 3y$ pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan

$2x + 3y \ge 9$
$x + 9 \ge 4$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

adalah ....

a. 18 **d.** 13
b. 16 **e.** 12
c. 15

8. Harga 1 kg beras Rp2.500,00 dan 1 kg gula Rp4.000,00. Seorang pedagang memiliki modal Rp300.000,00 dan tempat yang tersedia hanya memuat 1 kuintal. Jika pedagang tersebut membeli x kg beras dan y kg gula maka sistem pertidaksamaan dari masalah tersebut adalah ....

a. $5x + 8y \le 600,\ x + y \le 100,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
b. $5x + 8y \ge 600,\ x + y \le 100,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
c. $5x + 8y \le 600,\ x + y \ge 100,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
d. $5x + 8y \le 10,\ x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
e. $5x + 8y \ge 10,\ x + y \ge 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

9. Nilai maksimum fungsi tujuan $z = 8x + 6y$ dengan syarat

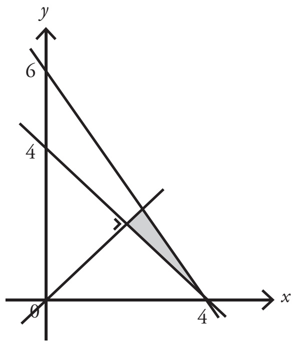
$4x + 2y \le 60$

$2x + 4y \le 48$

$x \ge 0, y \ge 0$, adalah ....

a. 132
b. 134
c. 136
d. 144
e. 152

10.



Nilai maksimum $f(x, y) = 5x + 10y$ di daerah yang diarsir adalah ....

a. 60 **d.** 20
b. 40 **e.** 16
c. 36

11. x adalah matriks berordo 2 × 2 memenuhi hubungan

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ maka X adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$

12. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka matriks hasil dari $3A - 2B$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

13. Hasil kali matriks berordo 3 × 2 dengan matriks berordo 2 × 5 adalah ....

a. 3 × 2 **d.** 5 × 3
b. 3 × 3 **e.** 2 × 5
c. 3 × 5

14. Untuk matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & s \end{bmatrix}$ berlaku $AB = BA$ maka ....

a. $(a + d)b = (p + s)q$
b. $(a + b)q = (p + s)q$
c. $(a - d)b = (p - s)q$
d. $(a - d)q = (p - s)b$
e. $(a - d)q = (s - p)b$

15. Invers matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

16. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $A^2 = pA + qI$ maka $p - q =$ ....

a. 16 **d.** 1
b. 9 **e.** –1
c. 8

17. Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} x+4 & 1 \\ 6 & 2x+y \end{bmatrix}$ jika $y =$ ....

a. –1 **d.** 4
b. –2 **e.** 5
c. 3

18. Matriks $\begin{bmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{bmatrix}$ tidak memiliki invers matriks jika ....
   a. a dan b sebarang
   b. $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $a = b$
   c. $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $a = -b$
   d. $a = 0$ dan b sebarang
   e. $b = 0$ dan a sebarang

19. Jika A adalah invers matriks $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ maka $A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = ...$
   a. $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

20. Jika sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x - 3y = p \\ 3x + 2y = q \end{cases}$ dan $X = \dfrac{a}{\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}$ maka det a = ...
   a. $2p + 3q$
   b. $2p - 3q$
   c. $3p + 2q$
   d. $3p - 2q$
   e. $-3p + 2q$

21. $U_8 \times U_3$ dari barisan 3, 8, 13, 18, ... adalah ....
   a. 490
   b. 492
   c. 494
   d. 496
   e. 498

22. Rumus suku ke-n dari barisan $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ adalah ....
   a. $U_n = \dfrac{n}{n+2}$
   b. $U_n = \dfrac{n}{n+1}$
   c. $U_n = \dfrac{n}{n+3}$
   d. $U_n = \dfrac{4}{n+1}$
   e. $U_n = \dfrac{4}{n+2}$

23. Diketahui suku ke-n dari barisan bilangan adalah $U_n = 8n - 5$. Jumlah 10 suku pertama dari barisan itu adalah ....
   a. 350
   b. 390
   c. 430
   d. 420
   e. 450

24. Jumlah semua bilangan-bilangan di antara 100 dan 300 yang habis dibagi oleh 5 adalah ....
   a. 8.200
   b. 8.000
   c. 7.800
   d. 7.600
   e. 7.400

25. Suku ke-10 dari suatu barisan aritmetika adalah 2 dan suku ke-3 adalah 23. Suku ke-6 dari barisan itu adalah ....
   a. 11
   b. 14
   c. 23
   d. 44
   e. 129

26. Jika suku pertama barisan geometri adalah 3 dan suku ke-6 adalah 96 maka 3.072 merupakan suku ke ....
   a. 9
   b. 10
   c. 11
   d. 12
   e. 13

27. Seutas pita dibagi menjadi 10 bagian dengan panjang yang membentuk deret aritmetika. Jika pita yang terpendek 20 cm dan yang terpanjang 155 cm, maka panjang pita semula adalah ....
   a. 800 cm
   b. 825 cm
   c. 850 cm
   d. 875 cm
   e. 900 cm

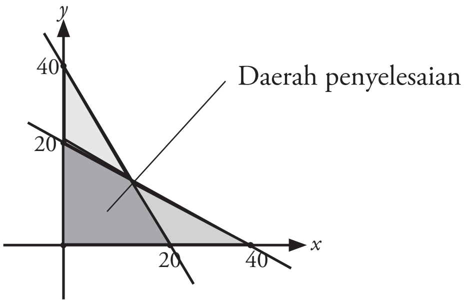
28. Jumlah n suku pertama suatu deret didefinisikan sebagai $S_n = 3n^2 - 4n$. Jika U_n adalah suku ke-n maka U_{10} = ...
   a. 43
   b. 53
   c. 67
   d. 147
   e. 240

29. Dalam deret geometri diketahui suku kedua = 10 dan suku kelima = 1.250. Jumlah 11 suku pertama deret tersebut adalah ....
   a. $2(5^n - 1)$
   b. $2(4^n)$
   c. $\frac{1}{2}(5^n - 1)$
   d. $\frac{1}{2}(4^n)$
   e. $\frac{1}{2}(5^n - 1)$

30. Suatu tali dibagi menjadi 5 bagian dengan panjang membentuk barisan geometri. Jika tali yang paling pendek adalah 16 cm dan tali yang paling panjang 81 cm, panjang tali semula adalah ....
   a. 242 cm
   b. 211 cm
   c. 133 cm
   d. 130 cm
   e. 121 cm

Bab I Program Linear

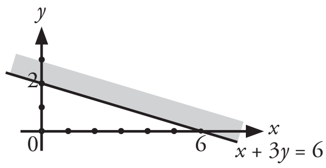
Kuis



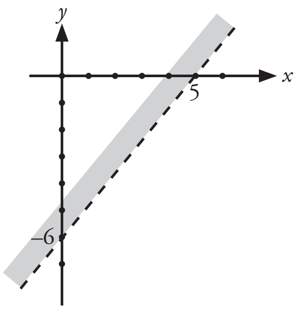
1. berbentuk segiempat

Tes Pemahaman 1.1

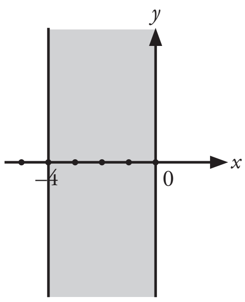
1. a.



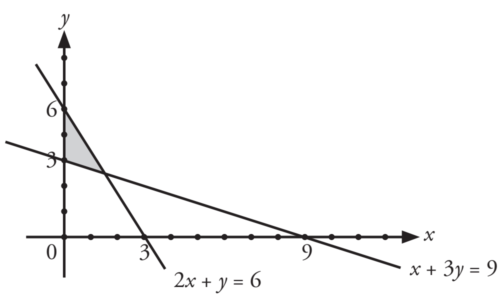
d.



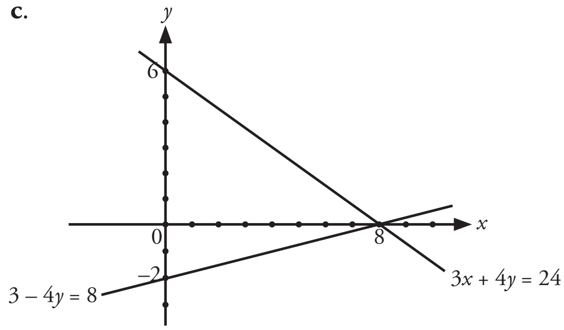
f.



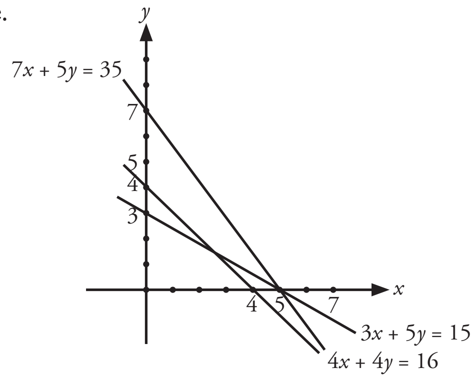
2. a.



c.



e.

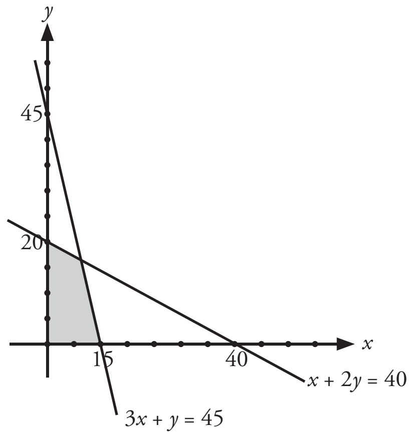


3. a. $3x + 5y \le 1\ 5$
   $x + 5y \ge 5$
   $x \ge 0$
   $y \ge 0$
   c. $5x - 6y \le 30$
   $x + 2y \le -2$
   $0 \le x \le 4$
   $y \le 0$
   e. $4x + 3y \le 16$
   $2x - 3y \ge -10$
   $y = -x$
   $x \ge 0$

Tes Pemahaman 1.2

3. $12x + 9y \le 1.000$
   $x + y \le 100$
   $x \ge 0$
   $y \ge 0$
4. 132
5. a. Fungsi tujuan $z = f(x, y) = 7.500x + 6.000y$
   Kendala:
   $x + 2y \le 40$
   $3x + y \le 45$
   $x \ge 0$
   $y \ge 0$

b.



c. Pendapatan maksimum yang diperoleh adalah Rp165.000,00

Tes Pemahaman Bab 1

1.	b	**11.**	d
3.	a	**13.**	e
5.	c	**15.**	a
7.	e	**17.**	e
9.	c	**19.**	a

21. $3x + y \le 18$
$4x - 3y \ge -2$
$-x + 4y \ge 7$

Bab II Matriks

Kuis

1. $\{(3, -4)\}$

Tes Pemahaman 2.1

2. **a.** Matriks S terdiri atas 2 baris dan 2 kolom
b. –0,3; 0; –0,2
c. $S_{2\times 2}$
$T_{2\times 3}$
d. $s_{21} = \frac{1}{2}$
$t_{23} = -0{,}2$

4. **a.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

5. **a.** A, E **c.** D
b. A **d.** C dan D

Tes Pemahaman 2.2

2. $S^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $U^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 8 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
$T^t = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

3. **a.** $R^t = \begin{bmatrix} 3a & 4 \\ a-2b & -5 \end{bmatrix}$
b. $a = 3, b = 1$

5. **a.** $x = -4, y = 0$
b. $x = 2, y = -4, z = -1$
c. $x = 3$ atau $x = -2$
$y = 3$
d. $x = -1, y = -2, z = 2$

Tes Pemahaman 2.3

2. **a.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. $x = 3, y = -14, z = 14, w = -13$

5. **a.** $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ **d.** tidak

Tes Pemahaman 2.4

2. **a.** –43
b. –46
c. –53

3. **a.** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
c. tidak memiliki invers
d. tidak memiliki invers

5. **a.** $x = -\frac{3}{2}$ **c.** $z = \frac{50}{3}$
b. $y = 5$

Tes Pemahaman 2.5

1. **a.** $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

3. **a.** –3
b. –2

5. **a.** $a = 2, b = -1, c = 3$

Tes Pemahaman Bab 2

1.	c	**11.**	d
5.	b	**13.**	c
3.	b	**15.**	b
7.	a	**17.**	a
9.	b	**19.**	a

21. **a.** tidak dapat dioperasikan
b. tidak dapat dioperasikan
c. $\begin{bmatrix} -3 & 58 \\ -6 & 32 \end{bmatrix} - \frac{1}{252}\begin{bmatrix} 32 & -58 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$

25. 1 bus Rp3.500.000

    1 mobil Rp1.250.000

Bab III Barisan dan Deret

Kuis

1. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50
3. 100
5. 210

Tes Pemahaman 3.1

1. a. $U_7 = 21$, $U_{11} = 33$
   b. $U_7 = 47$, $U_{11} = 71$
   c. $U_7 = \frac{7}{2}$, $U_{11} = 5\frac{1}{2}$
   d. $U_7 = 40$, $U_{11} = 24$
3. $a = 1$, $b = 2$
5. a. $S_{10} = 295$
   b. $S_{10} = -115$
7. $a = -12$, $b = -4$
9. 4.350

Tes Pemahaman 3.2

1. a. $r = -3$, $U_5 = 162$
   b. $r = \frac{1}{3}$, $U_5 = \frac{1}{9}$
3. a. $r = \frac{12}{5}$
   $U_n = 5\left(\frac{12}{5}\right)^{n-1}$
5. a. $S_\infty = -\frac{2}{3}$
   b. $S_\infty = \frac{8}{5}$
7. 192
9. $a = 6$

Tes Pemahaman Bab 3

1. c	11. d
3. b	13. c
5. d	15. d
7. b	17. d
9. c	19. c

21. a. $a = 2$, $b = 3$
    b. $3n - 1$
    c. $S_{15} = 345$
23. 8
25. 400.000

Evaluasi Semester 1

1. b	11. a	21. d
3. a	13. e	23. a
5. c	15. b	25. a
7. a	17. d	
9. d	19. b	

27. Rp550.000,00
29. $x = \frac{1}{4}$

Evaluasi Semester 2

1. c	11. d	21. a
3. e	13. e	23. b
5. e	15. c	25. d
7. e	17. e	
9. d	19. b	

27. $r = 2$, $U_{13} = 12.288$
29. pertambahan produksi per tahun 80 unit banyak produksi pada tahun ke sepuluh 1.220 unit

Evaluasi Akhir Tahun

1. a	11. e	21. c
3. e	13. c	23. b
5. e	15. d	25. b
7. e	17. e	27. d
9. a	19. d	29. c

Apendiks

Daftar Simbol

a	:	Suku pertama
A^t	:	Transpos matriks A
A^{-1}	:	Invers matriks A
b	:	Beda
C	:	Konstanta
$F(x)$	:	Fungsi terhadap variabel x
r	:	Rasio
S_n	:	Jumlah n suku pertama
S_∞	:	Jumlah deret geometri tak hingga
U_n	:	Suku ke-n
z	:	Fungsi tujuan
$\sum$	:	Notasi sigma
Δ	:	Selisih
$\in$	:	Elemen atau anggota
∞	:	Tak hingga
$=$	:	Sama dengan
$\neq$	:	Tidak sama dengan
$>$	:	Lebih besar dari
$\geq$	:	Lebih besar sama dengan
$<$	:	Lebih kecil dari
$\leq$	:	Lebih kecil sama dengan
$\bullet$	:	Dot

Daftar Istilah

A

Absis:
Koordinat mendatar suatu titik dalam sistem koordinat bidang merupakan jarak titik ke sumbu *y* dihitung sepanjang garis yang sejajar sumbu *x*.

Adjoin:
Berdampingan/ berbatasan.

Aritmetika:
Operasi hitung pada bilangan bulat positif dengan operasi penjumlahan, perkalian, pengurangan, dan pembagian

B

Barisan aritmetika:
Barisan dengan setiap sukunya sama dengan jumlah sebelumnya ditambah dengan bilangan konstan.

D

Daerah penyelesaian:
Daerah yang dibatasi oleh garis yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear.

Determinan:
Faktor hal yang menentukan.

Deret geometri:
Jumlah suku barisan geometri.

Diagonal:
Garis yang menghubungkan dua puncak yang tidak bersebelahan pada segi banyak.

E

Eliminasi:
Proses menentukan sistem persamaan lain dari sistem persamaan semula yang tidak lagi memuat bilangan yang dieliminasikan.

F

Fungsi linear:
Pemetaan suatu titik melalui persamaan linear dengan dua variabel.

Fungsi objektif:
Fungsi linear yang digunakan untuk menghitung nilai optimum.

G

Garis selidik:
Garis lurus yang menyilidiki setiap titik optimum sehingga didapat nilai optimum.

I

Invers:
Lawan atau kebalikan.

K

Kofisien:
Bagian suatu suku yang berupa bilangan /konstan.

Kofaktor:
Mewakili perkalian.

Konvergen:
Bersifat menuju suatu titik pertemuan.

M

Model matematika:
Kalimat metematika terjemahan dari soal cerita dengan menggunakan lambang matematika.

Matriks:
Susunan bilangan yang terdiri atas baris kolom.

Matriks baris:
Matriks yang hanya terdiri atas satu baris.

Matriks kolom:
Matriks yang hanya terdiri atas satu kolom.

Matriks persegi:
Matriks yang memiliki ordo sama.

Matriks diagonal:
Matriks persegi yang elemen diagonal utamanya satu.

Minor:
Bagian kecil.

N

Nilai optimum:
Titik sudut yang memenuhi daerah himpunan penyelesaian.

O

Ordinat:
Koordinat mendatar suatu titik pada koordinat cartesius dalam bidang yang merupakan jarak titik tersebut ke sumbu *x* dihitung sepanjang garis yang sejajar sumbu *y*.

Ordo matriks:
Banyaknya baris dan banyaknya kolom pada matriks.

P

Progam linear:
Menentukan nilai optimum dengan model matematika dan grafik fungsi linear.

S

Sumbu koordinat:
Koordinat mendatar dalam suatu sistem koordinat siku-siku berdimensi dua.

Skalar:
Bilangan real sebagai faktor perkalian.

T

Titik optimum:
Titik sudut yang memenuhi daerah himpunan penyelesaian.

Transpos matriks:
Pertukaran baris menjadi kolom pada matriks.

V

Variabel:
Faktor/ unsur yang ikut menentukan perubahan.

Indeks

Daftar Pustaka

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid I Edisi Ketujuh*. Jakarta: Interaksara.

Barnett, Raymond A and Michael R. Ziegler. 1997. *Applied Calculus for Bussiness, Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. United States of America: Prentice-Hall, Inc.

BSNP. 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Farlow, Stanley J. 1994. *Finite Mathematics and Its Application*. Singapore: Mc.Graw-Hill Book Co.

Leithold, Louis. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Martono, K. 1992. *Kalkulus*. Bandung: Fakultas MIPA Jurusan Matematika ITB.

Negoro, ST dan B. Harahap. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: PT. Ghalia Indonesia.

Purcell, Edwin J, dan Date Verberg. 2001. *Kalkulus Jilid I Edisi Ketujuh*. Jakarta: Interaksara.

Spiegel, Murray. 1988. *Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Tim Penyusun. 1999. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

W, Supriyadi. 1999. *Teori, Contoh, dan Soal-Soal Matematika dan Terapannya*. Bandung: Fakultas MIPA Universitas Padjadjaran.

Watson, Jenny, et all. 2001. *Math Quest for Victoria 7 and 8*. Victoria: John Willey&Sons.

ISBN 979 462 845 x

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007 tanggal 5 Desember 2007 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp6.960,00